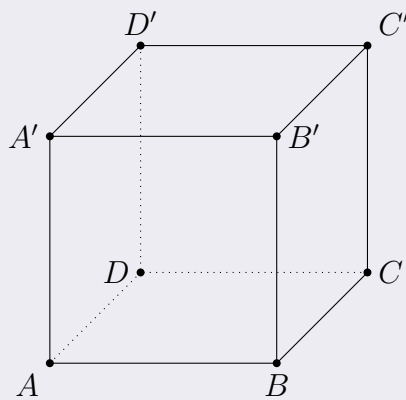


Questão 1 (2pts) Você leciona em uma escola do Ensino Médio e durante uma atividade um estudante sugere a seguinte definição: “duas retas são reversas quando estão em planos paralelos.”. Argumente para ajudar o estudante a entender o que são retas reversas e a evitar mal-entendidos. Use imagens como parte de seus argumentos.

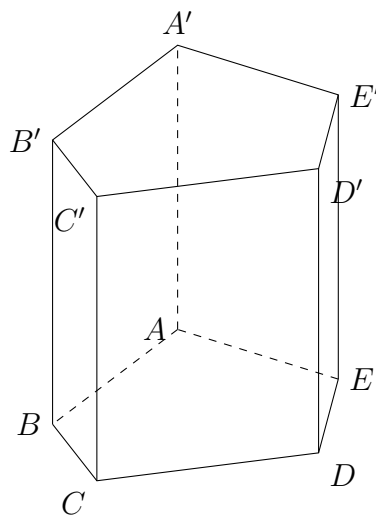
Solução:

Duas retas são reversas quando **não existe** um plano que contenha as duas, isto é, quando não são coplanares. Quando duas retas são reversas, existe um (e somente um) par de planos paralelos tais que cada plano contém uma das retas. Mas retas contidas em planos paralelos também podem ser paralelas entre si. Por exemplo, no cubo $ABCD - A'B'C'D'$, as retas AA' e $B'C'$ são reversas pois o único plano que contém A, A' e B' é a face $ABB'A'$ e esse plano não contém o ponto C' . Por outro lado, as retas AA' e BB' estão contidas nos planos paralelos $AA'D'D$ e $BB'C'C$, respectivamente, e são paralelas.



Definição de prisma: Sejam α e α' dois planos paralelos e r uma reta secante aos dois. Seja $A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo contido em α . Por todo ponto X pertencente ao polígono ou ao seu interior, trace a reta paralela a r passando por X , e seja X' o ponto em que essa reta intersecta o plano α' . A figura formada pela união dos segmentos XX' é chamada de prisma.

Questão 2 Considere um prisma pentagonal $ABCDE - A'B'C'D'E'$.



Mostre que:

- a) (1pt) as arestas laterais AA' , BB' , CC' , DD' e EE' são paralelas e congruentes entre si; e que
- b) (2pts) as bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são polígonos congruentes, isto é, defina uma correspondência biunívoca entre os vértices tal que:
- os lados formados por vértices correspondentes têm comprimentos iguais, e
 - os ângulos em vértices correspondentes têm medidas iguais.

Questão 3 Considere uma pirâmide $\mathcal{P} = V - ABCD$ de base quadrada em que todas as suas faces laterais são triângulos equiláteros de mesma aresta a .

- a) (1pt) Mostre que \mathcal{P} é uma pirâmide regular (apresente a definição também).
- b) (1pt) Desenhe duas planificações diferentes dessa pirâmide.
- c) (1pt) Seja M o ponto médio da aresta lateral VC . Desenhe a pirâmide com um caminho de menor comprimento sobre a superfície de \mathcal{P} que liga A a M (esse caminho está contido nas faces da pirâmide, não passa por dentro).
- d) (1pt) O caminho do item anterior é o único com esse comprimento?
- e) (1pt) Calcule os comprimentos dos caminhos dos itens anteriores em função de a (apenas).

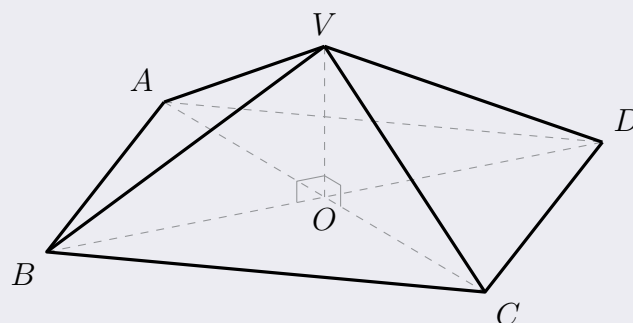
Solução:

- a) Lembre-se que uma pirâmide regular é uma pirâmide em que duas condições a seguir são satisfeitas:

- a base é um polígono regular, e
- a projeção ortogonal do vértice no plano da base é o centro do polígono da base.

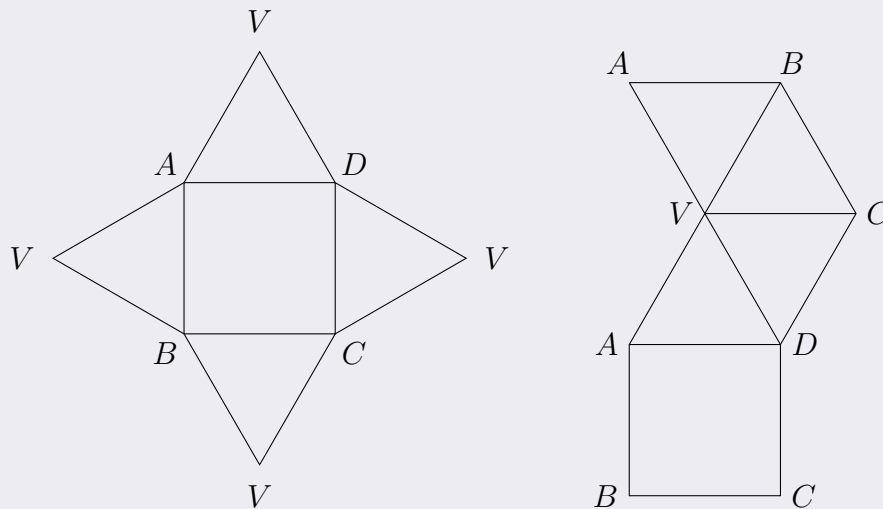
Como a base é um quadrado, a primeira condição é satisfeita. Para mostrar a segunda condição, seja O a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base. Observe que os triângulos VOA , VOB , VOC e VOD são todos congruentes pelo caso de congruências cateto-hipotenusa, pois:

- todos esses triângulos são retângulos em O ,
- as hipotenusas VA , VB , VC e VD são todas iguais, pelo enunciado, e
- o cateto VO é comum a todos os quatro triângulos.

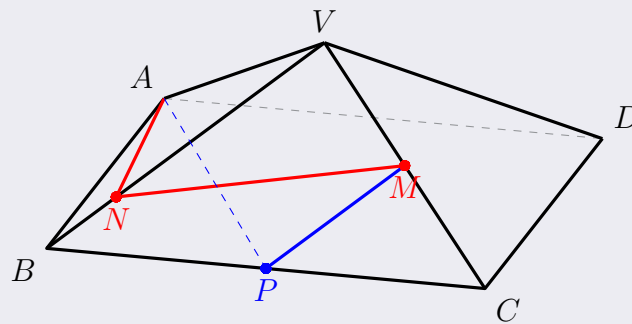


Dessas congruências se obtém que os terceiros lados, em cada um desses quatro triângulos, são iguais, isto é, $AO = BO = CO = DO$. De onde se conclui que O é o centro do quadrado $ABCD$ e está verificada a segunda condição da definição de pirâmide regular.

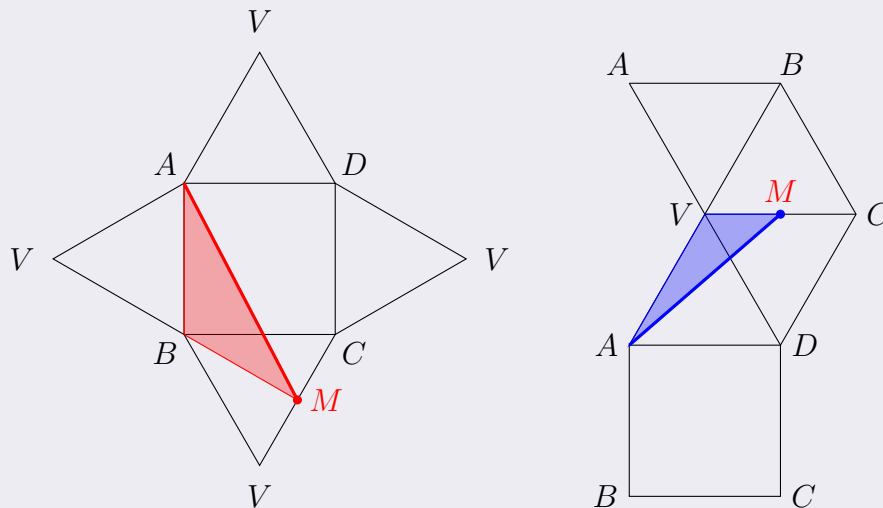
b) Duas planificações possíveis são:



c) Espera-se que você compare os dois caminhos (azul e vermelho), como na figura. Cada um deles tem um simétrico em que N pertence a VD (no caso do vermelho) e P pertence a CD (no caso do azul). O caminho de menor comprimento é o que percorre as faces laterais (o vermelho), como veremos no item d).



d) Os caminhos do item anterior podem ser encontrados por meio das planificações, considerando que a menor distância entre dois pontos do plano é um segmento de reta.



Seus comprimentos podem ser obtidos por meio do Teorema dos Cossenos nos triângulos ABM e AVM , respectivamente. Para isso, é necessário observar que os ângulos opostos a AM nesses triângulos medem 120° , que $AB = a$ e $BM = a\sqrt{3}/2$, no primeiro triângulo e $VA = a$ e $VM = a/2$, no segundo triângulo. No primeiro caso se obtém $AM = a\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}/2$ e no segundo, $AM = a\sqrt{7}/2$. Portanto, o caminho pelas faces laterais é menor que o caminho pela base e uma face lateral.