CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

Curso: PROTES **Professor:** Fabio Simas

Disciplina: Matemática Básica **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO (GABARITO)

Exercícios de fixação das propriedades.

No final do arquivo estão listadas algumas propriedades e observações que podem facilitar a resolução dos exercícios.

Exercício 1. Use as propriedades das potências para encontrar o valor numérico de cada uma das expressões numéricas a seguir.

a) $2{,}5^3$
b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$
c) $(-2)^4$
d) -2^4
e) $\dfrac{4^6}{4^3}$
f) $5^2 \cdot 5^3$
g) $7^4 \cdot 7^{-2}$
h) $\dfrac{2^{-3}}{2^{-6}}$
i) 2^{2^3}
j) $(2 \cdot 4)^2$
k) $(5^3)^2$
l) $(3 \cdot 5)^2$

Solução:

a) Lembramos que a potência é uma sequência de multiplicações de um número por ele mesmo, assim obtemos:

$$2{,}5^3 \quad = \quad (2{,}5) \cdot (2{,}5) \cdot (2{,}5) \quad = \quad 15,625.$$

b) Vamos notar que a potência envolve toda a fração, logo teremos a sequência de multiplicações da mesma, de modo a obter:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad = \quad \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \quad = \quad \frac{3^3}{2^3}.$$

Neste primeiro momento vimos a aplicação da propriedade 5 de forma exemplificada, agora basta efetuar o cálculo das potências para chegar ao resultado.

$$\frac{3^3}{2^3} \quad = \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \quad = \quad \frac{27}{8}.$$

c) Ao trabalhar com potências, o uso de parenteses "()" é algo para se manter atento, como o caso a seguir, nele temos uma potência de número negativo, que fica:

$$(-2)^4 \quad = \quad (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \quad = \quad +16.$$

Repare que houve também a multiplicação dos sinais negativos, o que afetou o resultado da conta.

d) Neste item temos o valor negativo de uma potência, o que o diferencia do item anterior, por exemplo. Aqui vamos aplicar da seguinte maneira:

$$-2^4 \quad = \quad -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \quad = \quad -16.$$

e) Temos aqui a divisão de potências de mesma base, vamos então calcular essas potências e observar o o resultado:

$$\frac{4^6}{4^3} \quad = \quad \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4}.$$

Como realizamos a divisão de uma sequânica de multiplicações, podemos "cortar" os termos que se repetem, logo, o resultado fica:

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} \quad = \quad 4 \cdot 4 \cdot 4 \quad = \quad 64.$$

No caso que vimos agora, tivemos a aplicação da propriedade 2 de forma exemplificada, após compreender o processo, é possível aplica-la der forma direta.

f) Na questão temos a multiplicação de potências de mesma base, vamos realizar seus cálculos:

$$5^2 \cdot 5^3 \quad = \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \quad = \quad 5^5 \quad = \quad 3125.$$

Podemos observar a aplicação de propriedade 1 de forma completa agora, a partir deste ponto, é possível aplicar de maneira direta a propriedade .

g) Dada a questão, vamos aplicar a Propriedade 1, com isso temos:

$$7^4 \cdot 7^{-2} \quad = \quad 7^{4+(-2)} \quad = \quad 7^2 \quad = \quad 49.$$

h) Divisão de potência de mesma base, neste caso usamos a Propriedade 2 e obtemos:

$$\frac{2^{-3}}{2^{-6}} \quad = \quad 2^{-3-(-6)} \quad = \quad 2^{-3+6} \quad = \quad 2^3 \quad = \quad 8.$$

i) Vemos aqui uma potência elevada a uma potência, neste caso, vamos primeiro efetuar o cálculo da potência mais externa, de modo a obter:

$$2^{2^3} \quad = \quad 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} \quad = \quad 2^8 \quad = \quad 256.$$

Ao final dessa lista, vale conferir as observações para ficar atento a alguns casos que podem confundir o entendimento das propriedades como esta que fizemos agora.

j) Podemos fazer esta questão de duas maneiras, utilizando a Propriedade 4 ou respeitando a ordem da expressão numérica presente, vamos fazer das duas formas. Utilizando a Propriedade 4, temos:

Obs.: Esta propriedade convém de ser usada principalmente em expressões algébricas.

$$(2 \cdot 4)^2 \quad = \quad 2^2 \cdot 4^2 \quad = \quad 4 \cdot 16 \quad = \quad 64.$$

Já a outra forma de calcularmos este caso é respeitando a ordem de resolução, assim teremos:

$$(2 \cdot 4)^2 \quad = \quad (8)^2 \quad = \quad 64.$$

k) Vemos aqui uma potência de potência. Repare novamente na presença dos parênteses.

$$(5^3)^2 \quad = \quad (5^3) \cdot (5^3) \quad = \quad 5^{3+3} \quad = \quad 5^6 \quad = \quad 15625.$$

Neste caso temos a aplicação por extenso da Propriedade 3, após sua compreensão, já é possível aplicar de forma direta.

l) Utilizando a Propriedade 4, teremos:

$$(3 \cdot 5)^2 \quad = \quad 3^2 \cdot 5^2 \quad = \quad 9 \cdot 25 \quad = \quad 225.$$

Exercício 2. Simplifique as expressões dadas eliminando expoentes negativos, caso existam. Apresente as suas soluções como um número ou uma fração elevado a uma potência.

a) $2^4 \cdot 2^{-3}$

b) $2^{-4} \cdot 2^3$

c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

d) $(6 \cdot 2)^{-2}$

e) $\dfrac{4^3}{4^6}$

f) $3^{-2} \cdot 4^{-2}$

g) $\dfrac{7^2}{7^5}$

h) $(5^{-2})^2$

Solução:

a) Temos uma multiplicação de potências de mesma base, logo vamos aplicar a Propriedade 1, obtendo:

$$2^4 \cdot 2^{-3} \quad = \quad 2^{4+(-3)} \quad = \quad 2^1 \quad = \quad 2.$$

b) Temos uma multiplicação de potências de mesma base, logo vamos aplicar a Propriedade 1 e observar o resultado:

$$2^{-4} \cdot 2^3 \quad = \quad 2^{(-4)+3} \quad = \quad 2^{-1}.$$

Obtemos um expoente negativo, e para tal caso vamos aplicar a Propriedade 6. (Vale lembrar que quando não há nada em baixo do número, tem um número 1 “escondido”.)

$$2^{-1} \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

c) Temos um expoente negativo, então, utilizando a Propriedade 6, vamos calcular:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \overset{P6}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \overset{P5}{=} \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Perceba que há a utilização de outras propriedades nas resoluções!

d) Vamos eliminar o expoente negativo usando a Propriedade 6.

$$(6 \cdot 2)^{-2} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{(6 \cdot 2)}\right)^{2} \overset{P5}{=} \frac{1^2}{(6 \cdot 2)^2} = \frac{1}{(12)^2} = \frac{1}{144}.$$

e) Vemos aqui uma divisão de potências de mesma base, logo, vamos aplicar a Propriedade 2, com isso obtendo:

$$\frac{4^3}{4^6} \overset{P2}{=} 4^{3-6} = 4^{-3} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \overset{P5}{=} \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

f) Utilizando as Propriedades, vamos calcular:

$$3^{-2} \cdot 4^{-2} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \overset{P5}{=} \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{144}.$$

g) Temos aqui uma divisão de potências de mesma base, então vamos aplicar a Propriedade 2, de tal modo a obter:

$$\frac{7^2}{7^5} \overset{P2}{=} 7^{2-5} = 7^{-3} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{7}\right)^{3} \overset{P5}{=} \frac{1^3}{7^3} = \frac{1}{343}.$$

h) Temos aqui uma potência de potência, neste caso, utilizaremos a Propriedade 3 para calcula-la, assim obtendo:

$$(5^{-2})^2 \overset{P3}{=} 5^{(-2)\cdot 2} = 5^{-4} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{5}\right)^{4} \overset{P5}{=} \frac{1^4}{5^4} = \frac{1}{625}.$$

Exercício 3. Escreva as expressões a seguir usando a notação de raízes e potências.

a) $3^{\frac{2}{5}}$ b) $(-3)^{\frac{5}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $4^{-\frac{2}{3}}$ e) $-5^{-\frac{1}{2}}$

Solução:

Vimos no material algumas propriedades de potências. Para resolvermos esse exercício, devemos lembrar que na transformação de uma potência com expoente fracionário em uma radiciação, o denominador do expoente se torna o índice da raiz. Neste caso, usaremos a seguinte propriedade: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

a) Chamaremos de a a base da potência, ou seja, $a = 3$. Nosso m será o numerador da fração e n o denominador, portanto $m = 2$ e $n = 5$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}.$$

b) Seguiremos o mesmo raciocínio, mas devemos sempre nos atentar aos sinais dos números. Dessa vez nosso $a = -3$. O valor de $m = 5$ e $n = 3$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(-3)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^5}.$$

OBS: Atente-se ao uso dos parênteses.

c) Da mesma forma, $a = 2$, $m = -1$ e $n = 2$. Portanto, teremos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^{-1}}.$$

OBS: Vale lembrar que o índice da raiz deve ser maior que 0, por isso $m = -1$ e $n = 2$, caso contrário $m = 1$ e $n = -2$ e isso não pode ocorrer.

d) Aplicando o mesmo princípio, agora $a = 4$. Dessa vez, $m = -2$ e $n = 3$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$4^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^{-2}}.$$

e) Seguindo a mesma lógica e considerando os sinais dos números, nossa base será $a = 5$. Neste caso, $m = 1$ e $n = 2$, portanto:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$-5^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[2]{5^{-1}}.$$

Exercício 4. Use as propriedades de radiciação e potências para encontrar o valor numérico de cada uma das questões abaixo.

a) $\sqrt{(-36)^2}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}$

c) $\sqrt{5^{-2}}$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{10.000}}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{36}}$

g) $\sqrt{\sqrt{2^8}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{2^7}{2^4}}$

Solução:

a) Por definição a raiz quadrada de um número real não-negativo a é um número *não-negativo* b tal que $b^2 = a$, nesse caso escrevemos $\sqrt{a} = b$. Assim, no conjunto dos números reais, *a raiz quadrada é sempre um número não-negativo*. Portanto, $\sqrt{(-36)^2} = 36$ pois 36 é não-negativo e elevado ao quadrado resulta em $(-36)^2$, afinal, $36^2 = (-36)^2$.

Resposta: $\sqrt{(-36)^2} = 36$.

Cuidado!! Um erro comum é escrever: $\sqrt{(-36)^2} = [(-36)^2]^{1/2} = (-36)^{2/2} = (-36)^1 = -36$, pois, na segunda igualdade estamos usando a Propriedade 7 de números reais que já supõe que a base é não-negativa.

b) Uma forma de trabalhar com radicais é transformá-los em potências (Propriedade 7) e usar as propriedades de potências a partir daí. Nas contas a seguir, usamos as propriedades P7 e P5 conforme indicado

$$\sqrt[3]{\frac{2}{27}} \overset{P7}{=} \left(\frac{2}{27}\right)^{1/3} \overset{P5}{=} \left(\frac{2^{1/3}}{27^{1/3}}\right) = \frac{2^{1/3}}{(3^3)^{1/3}} \overset{P3}{=} \frac{2^{1/3}}{3} \overset{P7}{=} \frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

c) Como 5 é não-negativo, podemos usar as propriedades sem medo de errar. Nas contas a seguir, usamos as Propriedades 7, 3 e 6. Com isso, obtemos:

$$\sqrt{5^{-2}} \overset{P7}{=} (5^{-2})^{1/2} \overset{P3}{=} 5^{\frac{-2}{2}} = 5^{-1} \overset{P6}{=} \frac{1}{5}.$$

d) Lembre-se que $10.000 = 10^4$, o expoente é o número de zeros. Assim, $10^2 = 100$.

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{10.000}} &\overset{P7}{=} \left[(10.000)^{1/3}\right]^{1/2} \overset{P3}{=} 10.000^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \\ &= 10.000^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \left[\left(10^4\right)^{1/2}\right]^{1/3} \overset{P3}{=} (10^{4/2})^{1/3} = (10^2)^{1/3} = 100^{1/3} \overset{P7}{=} \sqrt[3]{100}.\end{aligned}$$

e) Aqui basta usar as propriedades como indicado.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \overset{P7}{=} 2^{1/2} \cdot 8^{1/2} \overset{P4}{=} (2 \cdot 8)^{1/2} = 16^{1/2} \overset{P7}{=} \sqrt{16} = 4.$$

f) Aqui basta usar as propriedades diretamente.

$$\sqrt{\frac{1}{36}} \overset{P7}{=} \left(\frac{1}{36}\right)^{1/2} \overset{P5}{=} \frac{1^{1/2}}{36^{1/2}} \overset{P7}{=} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}.$$

g) Utilizando as propriedades diretamente.

$$\sqrt{\sqrt{2^8}} \overset{P7}{=} \left[\left(2^8\right)^{1/2}\right]^{1/2} \overset{P3}{=} \left(2^8\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \left(2^8\right)^{1/4} \overset{P3}{=} 2^{8/4} = 2^2 = 4.$$

h) Lembre-se que raiz cúbica de a é o número real b tal que $b^3 = a$, escreve-se $\sqrt[3]{a} = b$. Logo $\sqrt[3]{2^3} = 2$.

$$\sqrt[3]{\frac{2^7}{2^4}} \overset{P2}{=} \sqrt[3]{2^{7-4}} = \sqrt[3]{2^3} = 2.$$

Exercício 5. Utilizando todas as propriedades aprendidas até agora, simplifique as expressões algébricas a seguir:

a) $x^2 \cdot x^5$

b) $x^2 \cdot x^{-5}$

c) $y^3 \cdot y^{-7} \cdot y^6$

d) $\dfrac{w^4 \cdot w^6}{w^{10}}$

e) $(x^2 \cdot y^3) \cdot y^7$

f) $\dfrac{z^6 \cdot z^{-3}}{z^3 \cdot z^7}$

g) $v^{\frac{-5}{2}}$

h) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$

Solução:

a) A variável x representa um número real. Podemos aplicar a propriedade 1 para resolver esse item.

$$x^2 \cdot x^5 \overset{\text{P1}}{=} x^{2+5} = x^7.$$

Resposta: x^7.

b) Temos novamente uma multiplicação de duas variáveis x. Dessa forma, podemos utilizar a mesma propriedade para encontrar o resultado.

$$x^2 \cdot x^{-5} \overset{\text{P1}}{=} x^{2+(-5)} = x^{-3}.$$

Resposta: x^{-3}.

c) Desta vez, ao invés de termos apenas duas variáveis temos três. Como elas são iguais, basta usar a mesma propriedade que as questões anteriores.

$$y^3 \cdot y^{-7} \cdot y^6 \overset{\text{P1}}{=} y^{3+(-7)+6} = y^2.$$

Resposta: y^2.

d) Multiplicando primeiro os valores do numerador e depois utilizando a propriedade da divisão de potências de mesma base, encontraremos:

$$\frac{w^4 \cdot w^6}{w^{10}} \overset{\text{P1}}{=} \frac{w^{4+6}}{w^{10}} = \frac{w^{10}}{w^{10}} \overset{\text{P2}}{=} w^{10-10} = w^0 = 1.$$

Resposta: 1.

e) As variáveis x e y representam números reais, então basta usar as mesmas propriedades usadas nas questões anteriores.

$$(x^2 \cdot y^3) \cdot y^7 \quad = \quad x^2 \cdot y^3 \cdot y^7 \quad \overset{\text{P1}}{=} \quad x^2 \cdot y^{10}.$$

Resposta: x^2y^{10}.

f) Multiplicando primeiro os valores do numerador entre si e os valores do denominador, usando as propriedades como indicado, fica:

$$\frac{z^6 \cdot z^{-3}}{z^3 \cdot z^7} \overset{P1}{=} \frac{z^{6-3}}{z^{3-7}} = \frac{z^3}{z^{-4}} \overset{P6}{=} z^3 \cdot z^4 = z^7.$$

Resposta: z^7.

g) Repare que há muitos caminhos a seguir e diferentes expressões para a resposta, seguem duas possibilidades:

Solução 1:

$$v^{\frac{-5}{2}} \overset{P6}{=} \frac{1}{v^{5/2}} \overset{P7}{=} \frac{1}{\sqrt{v^5}} \quad \text{aqui também é possível escrever} \quad \frac{1}{v^{5/2}} = \frac{1}{v^{2+1/2}} = \frac{1}{v^2 \cdot v^{1/2}} = \frac{1}{v^2 \cdot \sqrt{v}}$$

Solução 2:

$$v^{\frac{-5}{2}} = v^{\frac{-5}{1} \cdot \frac{1}{2}} \overset{P3}{=} (v^{\frac{-5}{1}})^{\frac{1}{2}} \overset{P6}{=} \left(\frac{1}{v^5}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{P5}{=} \frac{1^{1/2}}{(v^5)^{1/2}} \overset{P7}{=} \frac{1}{\sqrt{v^5}}.$$

Resposta: $\dfrac{1}{\sqrt{v^5}}$ ou $\dfrac{1}{v^2 \cdot \sqrt{v}}$.

h) Uma possibilidade é $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} \overset{P7}{=} \left[(a)^{1/3}\right]^{1/5} \overset{P3}{=} a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = a^{1/15} = \sqrt[15]{a}$.

Resposta: $\sqrt[15]{a}$.

Exercício de aprofundamento.

Exercício 6. Quanto vale $\sqrt{12^{12}}$?

(a) 6^6 (b) $2^{2\sqrt{3}}$ (c) $2^{12} \cdot 3^6$ (d) 6^{12} (e) $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$

Solução:

Vamos utilizar a propriedade 7 para transformar essa radiciação em potência com expoente fracionário. Fica $\sqrt{12^{12}} \overset{P7}{=} 12^{\frac{12}{2}} = 12^6$. Como $12 = 3 \cdot 4$ obtemos

$$12^6 = (4 \cdot 3)^6 = (2^2 \cdot 3)^6 \overset{P4}{=} (2^2)^6 \cdot 3^6 \overset{P3}{=} 2^{12} \cdot 3^6.$$

Portanto, a resposta correta é a letra (c).

Propriedades. Para quaisquer números reais a e b e números racionais r e s.

(P1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

(P2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, para $a \neq 0$.

(P3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

(P4) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$.

(P5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$, para $b \neq 0$.

(P6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{r}$, para a e b diferentes de zero.

(P7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para m inteiro e n natural, sendo que para n par, a expressão só tem valor real quando $a \geq 0$.

Para m negativo, é necessário que $a \neq 0$, pois o a vira um denominador.

Observações: Lembre-se que em geral:

(i) $a^1 = a$ para todo a real.

(ii) $1^r = 1$, para todo r racional.

(iii) $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Por exemplo, $2^0 = 2^{1-1} = 2^1 \cdot 2^{-1} = 2^1 \cdot \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{2^1}{2^1} = \dfrac{2}{2} = 1$

(iv) $a^{m^n} \neq (a^m)^n$. Por exemplo, $2^{3^2} \neq (2^3)^2$, pois $2^{3^2} = 2^{3\cdot 3} = 2^9 = 512$, enquanto $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$.