CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

Curso: PROTES **Professor:** Fabio Simas

Disciplina: Matemática Básica **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - PRODUTOS NOTÁVEIS (GABARITO)

Exercício 1. Desenvolva os produtos notáveis:

a) $(x+2)^2$

b) $(5+y)^2$

c) $(a+b)^2$

d) $(-3-y)^2$

e) $(-5+x)^2$

f) $(a-b)^2$

g) $(3+y)\cdot(3-y)$

h) $(x+4)\cdot(x-4)$

i) $(a+b)\cdot(a-b)$

Solução:

Para que haja uma melhor compreensão da fórmula, iremos começar resolvendo o item c. Os itens f e i seguem o mesmo raciocínio. Vamos começar a resolvendo o item c aplicando a propriedade da distributiva. De início, temos $(a+b)^2$ mas sabemos que isso pode ser escrito também como $(a+b)\cdot(a+b)$. Usando a propriedade da distributiva temos que:

$$(a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b$$

$$(a\cdot a+a\cdot b)+(b\cdot a+b\cdot b)$$

$$a^2+a\cdot b+a\cdot b+b^2$$

$$a^2+2a\cdot b+b^2$$

. Assim, temos que $(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$.

a) Seja $a=x$ e $b=2$, utilizando a fórmula, sabemos que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Substituindo, temos que $(x)^2+2\cdot x\cdot 2+(2)^2$, logo $(x+2)^2=x^2+4x+4$.

b) Seja $a=5$ e $b=y$, utilizando a fórmula, sabemos que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Substituindo, temos que $(5)^2+2\cdot 5\cdot y+(2)^2$, logo $(5+y)^2=25+10y+y^2$.

c) Como vimos na introdução da resolução, encontramos que $(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$.

d) Vamos chamar o -3 de a e o $-y$ de b. Como já conhecemos a fórmula, basta aplicar $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ para $a=-3$ e $b=-y$.

$$(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-y)+(-y)^2$$

$$9+6y+y^2$$

. Portanto, o $(-3-y)^2 = 9+6y+y^2$.

e) Chamaremos o -5 de a e o x de b. Como já conhecemos a fórmula, basta aplicar $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ para $a=-5$ e $b=x$.

$$(-5)^2 + 2\cdot(-5)\cdot(x) + (x)^2$$

$$25 - 10x + x^2$$

. Portanto, o $(-5+x)^2 = 25-10x+x^2$.

f) Vamos aplicar a propriedade da distributiva. De início, temos $(a-b)^2$ mas sabemos que isso pode ser escrito também como $(a-b)\cdot(a-b)$.

Usando a propriedade da distributiva temos que:

$$(a-b)\cdot a + (a-b)\cdot -b$$

$$(a\cdot a - a\cdot b) + (-b\cdot a + (-b)\cdot -b)$$

$$a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2$$

$$a^2 - 2a\cdot b + b^2$$

Assim, temos que $(a-b)^2 = a^2 - 2a\cdot b + b^2$.

g) Antes de corrigir este item, verifique o item i para uma melhor compreensão da fórmula. Temos que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$, então $a=3$ e $b=y$. Assim, ficamos com $(3)^2-(y)^2 = 3^2-y^2$.

h) Da mesma forma que o item anterior, sabemos que $a=x$ e $b=4$. Com isso, sabemos que se $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$, então $(x+4)(x-4) = x^2-4^2 = x^2-16$.

i) Vamos aplicar a propriedade da distributiva em $(a+b)\cdot(a-b)$.

$$(a+b)\cdot a + (a+b)\cdot -b$$

$$(a\cdot a + a\cdot b) + (-b\cdot a + b\cdot -b)$$

$$a^2 + ab - ba - b^2$$

$$a^2 - b^2$$

Assim, temos que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$.

Exercício 2. Utilize a propriedade da distributiva para desenvolver as expressões abaixo.

a) $2(x+3)$

b) $3(y+9)$

c) $(4+x)y$

d) $y(74x+y)$

e) $(10+2x+y)t$

f) $(x-2)(x-7)$

g) $(y+5)(y-3)$ h) $(1+2x)(5y+3)$ i) $(x+y+1)(2+x)$

Solução:

a) Vamos utilizar a propriedade mostrada na questão 1 anteriormente. Faremos da seguinte forma:

$$2(x+3)$$

$$2\cdot x+2\cdot 3$$

$$2x+6$$

Portanto, o desenvolvimento de $2(x+3)=2x+6$.

b) Utilizando novamente a propriedade da distributiva, precisamos multiplicar tanto y quanto 9 por 3. Assim teremos:

$$3(y+9)$$

$$3\cdot y+3\cdot 9$$

$$3y+27$$

Logo, o desenvolvimento de $3(y+9)=3y+27$.

c) Utilizando novamente a propriedade da distributiva, precisamos multiplicar tanto 4 quanto o x por y. Assim teremos:

$$(4+x)y$$

$$4\cdot y+x\cdot y$$

$$4y+xy$$

Assim, o desenvolvimento de $(4+x)y=4y+xy$.

d) Da mesma forma, segue que o y precisa ser multiplicado tanto pelo $74x$ quanto y.

$$y(74x+y)$$

$$y\cdot 74x+y\cdot y$$

$$74xy+y^2$$

Logo, o desenvolvimento de $y(74x+y)=74xy+y^2$.

e) Diferentemente dos primeiros itens, agora temos três termos dentro dos parênteses. Apesar disso, utilizaremos da mesma propriedade, porém multiplicaremos todos os três termos por t, ao invés de apenas dois, como feito anteriormente.

$$(10 + 2x + y)t$$

$$10 \cdot t + 2x \cdot t + y \cdot t$$

$$10t + 2xt + yt$$

Com isso, encontramos que o desenvolvimento de $(10 + 2x + y)t = 10t + 2xt + yt$.

f) Ao invés de termos apenas um número sendo multiplicado pela expressão em parênteses, temos dois. Neste caso, precisaremos multiplicar tanto o x quanto o -7 por $x - 2$:

$$(x - 2)(x - 7)$$

$$(x - 2) \cdot x + (x - 2) \cdot (-7)$$

$$x \cdot x + (-2) \cdot x + x \cdot (-7) + (-2) \cdot (-7)$$

$$x^2 - 2x - 7x + 14$$

$$x^2 - 9x + 14$$

Portanto, o desenvolvimento de $(x - 2)(x - 7) = x^2 - 9x + 14$.

g) Neste caso, ao invés de termos apenas um número sendo multiplicado pela expressão em parênteses, temos dois. Seguindo a mesma lógica, também teremos que multiplicar esse novo número pelos outros dois da seguinte forma:

$$(y + 5)(y - 3)$$

$$(y + 5) \cdot y + (y + 5) \cdot (-3)$$

$$y \cdot y + 5 \cdot y + y \cdot (-3) + 5 \cdot (-3)$$

$$y^2 + 5y - 3y - 15$$

$$y^2 + 2y - 15$$

Logo, o desenvolvimento de $(y + 5)(y - 3)$ é $y^2 + 2y - 15$.

h) Seguindo a mesma lógica dos dois itens anteriores, multiplicaremos o $5y$ e o 3 por $(1 + 2x)$. A partir disso teremos:

$$(1 + 2x)(5y + 3)$$

$$(1 + 2x) \cdot 5y + (1 + 2x) \cdot 3$$

$$1 \cdot 5y + 2x \cdot 5y + 1 \cdot 3 + 2x \cdot 3$$

$$5y + 10xy + 3 + 6x$$

Portanto, temos que $(1 + 2x)(5y + 3) = 5y + 10xy + 3 + 6x$

i) Note que desta vez temos três termos em um parênteses e 2 no outro. Apesar disso, a propriedade se mantém e precisamos no atentar para que todos os números sejam multiplicados. Assim teremos:

$$(x + y + 1)(2 + x)$$

$$x \cdot 2 + y \cdot 2 + 1 \cdot 2 + x \cdot x + y \cdot x + 1 \cdot x$$

$$2x + 2y + 2 + x^2 + xy + x$$

$$3x + 2y + 2 + x^2 + xy$$

Após resolvermos com atenção, encontraremos que o desenvolvimento de $(x + y + 1)(2 + x) = 3x + 2y + 2 + x^2 + xy$.

Exercício 3. Se $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -12$, calcule o valor de ab.

Solução:

Podemos calcular o valor de ab aplicando a fórmula. Assim, teremos que:

$$(a - b)^2 - (a + b)^2 = -12$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) = -12$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = -12$$

$$-2ab - 2ab = -12$$

$$-4ab = -12$$

$$ab = \frac{-12}{-4} = 3$$

Logo, o valor de ab é 3.

Exercício 4. Desenvolva com atenção os produtos notáveis a seguir:

a) $(2x + y)^2 - (3x - 2y)^2$

b) $(x^2y^3 - xy)^2$

c) $(n^3 - \frac{1}{2}n)^2$

d) $(-3 - \frac{y^2}{4})^2$

e) $(\frac{1}{3}m + 1) \cdot (\frac{1}{3}m - 1)$

f) $(3x^2 + x) \cdot (3x^2 - x)$

g) $(-x^2y - x) \cdot (-x^2y + x)$

Solução:

a) Podemos aplicar as propriedades que aprendemos. Precisamos lembrar que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ e $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Na primeira parte, $(2x+y)^2$, chamaremos $2x$ de a e y de b.Então, teremos que $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + (y)^2$. Faremos a mesma coisa para a segunda parte $-(3x-2y)^2$. Dessa vez nosso $a = 3x$ e o $b = -2y$. Assim teremos $-((3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2)$. Agora, basta resolver normalmente.

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + (y)^2 - ((3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2)$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 - (9x^2 - 12xy + 4y^2)$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2$$

$$-5x^2 + 16xy - 3y^2$$

Portanto, o desenvolvimento de $(2x+y)^2 - (3x-2y)^2$ é $-5x^2 + 16xy - 3y^2$.

b) Usando o mesmo raciocínio, do item anterior, podemos chamar x^2y^3 de a e $-xy$ de b. Podemos assim usar que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Teremos que:

$$(x^2y^3)^2 + 2 \cdot x^2y^3 \cdot -xy + (xy)^2$$

$$x^4y^6 - 2x^3y^4 + x^2y^2$$

Então, o desenvolvimento de $(x^2y^3 - xy)^2$ será $x^4y^6 - 2x^3y^4 + x^2y^2$.

c) Na expressão $(n^3 - \frac{1}{2}n)^2$, podemos chamar $a = n^3$ e $b = -\frac{1}{2}n$. Assim, podemos aplicar a fórmula e usar que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(n^3)^2 + 2 \cdot (n^3) \cdot (-\frac{1}{2}n) + (-\frac{1}{2}n)^2$$

$$n^6 - \frac{2}{2} \cdot (n^4) + \frac{1}{4}n^2$$

$$n^6 - n^4 + \frac{n^2}{4}$$

Portanto, o desenvolvimento de $(n^3 - \frac{1}{2}n)^2$ será $n^6 - n^4 + \frac{n^2}{4}$.

d) Na expressão $(-3 - \frac{y^2}{4})^2$, podemos chamar $a = -3$ e $b = -\frac{y^2}{4}$. Assim, podemos aplicar a fórmula e usar que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (-\frac{y^2}{4}) + (-\frac{y^2}{4})^2$$

$$9 + 6\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{16}$$

$$9 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{y^2}{16}$$

Portanto, o desenvolvimento de $(-3 - \frac{y^2}{4})^2$ será $9 + \frac{3y^2}{2} + \frac{y^2}{16}$.

e) Neste item, vamos utilizar o que praticamos no exercício 1. Utilizando a fórmula do item i em $(\frac{1}{3}m+1)\cdot(\frac{1}{3}m-1)$, chamaremos $a = \frac{1}{3}m$ e $b = 1$. Assim, basta lembrar que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

$$a^2 - b^2$$

$$(\frac{1}{3}m)^2 - (1)^2$$

$$\frac{1}{9}m^2 - 1$$

Portanto, o desenvolvimento de $(\frac{1}{3}m + 1) \cdot (\frac{1}{3}m - 1)$ será $\frac{m^2}{9} - 1$.

f) Usando o mesmo raciocínio, do item anterior, podemos chamar $3x^2$ de a e x de b. Podemos assim usar que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Teremos que:

$$a^2 - b^2$$

$$(3x^2)^2 - (x)^2$$

$$9x^4 - x^2$$

Então, o desenvolvimento de $(3x^2 + x) \cdot (3x^2 - x)$ será $9x^4 - x^2$.

g) Na expressão $(-x^2y - x) \cdot (-x^2y + x)$, podemos chamar $a = -x^2y$ e $b = x$. Assim, podemos aplicar a fórmula e usar que:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x^2y)^2 - (x)^2$$

$$x^4y^2 - x^2$$

Portanto, o desenvolvimento de $(-x^2y - x) \cdot (-x^2y + x)$ será $x^4y^2 - x^2$.

Exercício 5. Qual expressão devemos adicionar à expressão $x^2 - 4x + 10$ para que o resultado represente $(x - 5)^2$?

Solução:

Podemos começar pensado no desenvolvimento de $(x - 5)^2$. Sabemos que $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Agora, basta comparar $x^2 - 10x + 25$ com $x^2 - 4x + 10$. Podemos subtrair uma expressão da outra para descobrir quanto falta, e então encontraremos o resultado.

$$x^2 - 10x + 25 - (x^2 - 4x + 10)$$

$$= x^2 - 10x + 25 - x^2 + 4x - 10$$

$$= -10x + 25 + 4x - 10$$

$$= -6x + 15.$$

Portanto, o que precisamos adicionar a expressão $x^2 - 4x + 10$ para chegarmos em $(x-5)^2$ é $-6x + 1$.

Exercício 6. Seja $A = (x+6)^2 + (x-6)\cdot(x+6)$ e $B = -4x\cdot(x+2)$, calcule $A + B$.

Solução:

Começaremos resolvendo A e B separadamente e depois calcularemos $A + B$. Em A temos $(x+6)^2 + (x-6)\cdot(x+6)$. Podemos resolver aplicando a fórmula do quadrado da soma e a propriedade distributiva.

$$A = (x+6)^2 + (x-6)\cdot(x+6)$$

$$A = x^2 + 12x + 36 + x^2 - 36$$

$$A = 2x^2 + 12x.$$

Agora que já descobrimos o valor de A, resolveremos B aplicando a propriedade da distributiva.

$$B = -4x\cdot(x+2)$$

$$B = -4x^2 - 8x.$$

Como achamos os valores de A e B, agora basta soma-los.

$$A + B = (2x^2 + 12x) + (-4x^2 - 8x)$$

$$= 2x^2 + 12x - 4x^2 - 8x$$

$$= -2x^2 + 4x.$$

Portanto, o valor de $A + B = -2x^2 + 4x$.

Exercício 7. Escreva a forma fatorada dos itens a seguir.

a) $x^2 - 9$

b) $x^2 + 16x + 64$

c) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

d) $49 - x^2$

e) $1 - x^4$

f) $x^4 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{9}{49}$

Solução:

a) Podemos observar que $x^2 - 9$ se trata da diferença entre dois números ao quadrado, o x e o 3. Vimos no material que a diferença de quadrados é dada por $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$.Ou seja, a diferença de quadrados é equivalente ao produto da soma pela diferença. Com isso, podemos escrever a expressão da seguinte forma: $(x+3) \cdot (x-3)$.

b) Neste caso, podemos notar que $x^2 + 16x + 64$ se trata do quadrado da soma de algum número. Sabemos que o quadrado da soma pode ser escrito assim: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Cabe a nós descobrirmos a e b. Podemos comparar a expressão que temos com a fórmula. Temos um x^2 e $64 = 8^2$ que são fortes candidatos a serem a^2 e b^2. Agora precisamos verificar o termo $2ab$. Se $a^2 = x^2$, então $a = x$, e se $b^2 = 8^2$, então $b = 8$. Multiplicando $2 \cdot a \cdot b$, teremos $2 \cdot x \cdot 8 = 16x$. O que faz sentido, pois $16x$ é exatamente o que faltava na expressão.
Agora, como já temos $a = x$ e $b = 8$, podemos escrever $x^2 + 16x + 64$ como $(x+8)^2$.

c) Seguindo a mesma lógica do item anterior, agora temos um caso de quadrado da diferença. Sabemos que o quadrado da diferença pode se escrito da seguinte forma: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Podemos novamente comparar a expressão que temos com a fórmula. Temos um x^2 e $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}^2$ que são fortes candidatos a serem a^2 e b^2. Agora precisamos verificar o termo $2ab$. Se $a^2 = x^2$, então $a = x$, e se $b^2 = \frac{2}{3}^2$, então $b = \frac{2}{3}$. Multiplicando $2 \cdot a \cdot b$, teremos $2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x$. O que faz sentido, pois $\frac{4}{3}x$ é exatamente o que faltava para chegarmos na expressão inicial.
Agora, como já temos $a = x$ e $b = \frac{2}{3}$, podemos escrever $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ como $(x + \frac{2}{3})^2$.

d) Podemos observar novamente que se trata da diferença entre dois números ao quadrado. Dessa vez, se trata do 7 e do x. Como sabemos que $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, então $49 - x^2 = (7-x) \cdot (7+x)$.

e) Mais uma vez, temos o caso da diferença de quadrados. Ao contrário dos itens anteriores, nesse temos um x^4. Uma outra maneira de escrever x^4, é utilizando a propriedade de potência para que ele se torne $(x^2)^2$. Agora, fica mais fácil de identificar que os números elevados ao quadrado são 1 e x^2. Assim, podemos escrever $1 - x^4$ como $(1 + x^2) \cdot (1 - x^2)$.

f) Apesar de parecer um pouco diferente dos outros itens, esse exercício também se trata do quadrado da soma. Sabemos que ele pode se escrito da seguinte forma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Podemos comparar a expressão que temos com a fórmula. Temos um x^4 e $\frac{9}{49} = \frac{3}{7}^2$ que são fortes candidatos a serem a^2 e b^2. Agora precisamos verificar o termo $2ab$. Se $a^2 = x^4$, então $a = x^2$, e se $b^2 = \frac{9}{49}^2$, então $b = \frac{3}{7}$. Multiplicando $2 \cdot a \cdot b$, teremos $2 \cdot x \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}x^2$. O que faz sentido, pois $\frac{6}{7}x^2$ é exatamente o que faltava para chegarmos na expressão inicial.
Agora, como já temos $a = x^2$ e $b = \frac{3}{7}$, podemos escrever $x^4 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{9}{49}$ como $(x^2 + \frac{3}{7})^2$.