CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

UNIRIO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Curso: PROTES **Professor:** Fabio Simas

Disciplina: Matemática Básica **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - SISTEMAS DE EQUAÇÕES (GABARITO)

Exercício 1. Resolva os sistemas de equações lineares a seguir.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 200 \\ x - y = 70 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ 4x + 6y = 248 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 9y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 13p - 92q = 237 \\ 12p - 91q = 237 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

Solução:

a) Utilizando o método da adição, temos que eliminar uma da variáveis ao somar as equações de modo que possamos resolver a outra variável.
o sistema inicial é:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Nele, podemos observar que ao multiplicar equação $x - y = -5$ por (3) conseguimos eliminar a variável y. Realizando a multiplicação da equação (é necessário multiplicar ambos os lados da equação), teremos: $3x - 3y = -15$, e com isso é possível montar um novo sistema (vale lembrar que o sistema é equivalente ao inicial), sendo ele:

$$\begin{cases} 3x - 3y = -15 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Agora, podemos somar as equações desse sistema, ficando com $5x = -5$, sendo assim, $x = -1$.
Substituindo $x = -1$ na equação $x - y = -5$, por exemplo, encontraremos: $(-1) - y = -5$, que é igual a $-y = -5 + 1$, logo $y = 4$.
Dica: Para confirmar que seus cálculos estão corretos, experimente substituir os valores encontrados nas equações do sistema. Se o resultado estiver correto, parabéns, você encontrou uma solução do sistema!

b) Agora utilizaremos o método da substituição.

Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ x - y = 70 \end{cases}$$

podemos, por exemplo, isolar o x na segunda equação, ficando com $x = 70 + y$. O próximo passo é substituir o x na equação $x+y = 200$, e com isso obtemos: $(70+y)+y = 200$, ou seja, $2y = 200-70$, logo, $y = 65$.

Por fim, vamos substituir o valor encontrado para y na equação $x = 70 + y$, obtendo assim: $x = 70 + (65)$, logo, $x = 135$.

c) Temos o sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ 4x + 6y = 248 \end{cases}$$

Podemos observar que dividindo a equação $4x + 6y = 248$ por (-2),obtém-se: $\frac{4x}{-2} + \frac{6y}{-2} = \frac{248}{-2}$ logo, ficamos com a equação $-2x - 3y = -124$.

Agora, podemos montar um novo sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ -2x - 3y = -124 \end{cases}$$

A partir dele utilizaremos o método da adição. Somando as equações, temos que: $3x = 96$, logo $x = 32$.

Substituindo o valor de x na equação $5x + 3y = 220$, por exemplo, teremos: $5 \cdot (32) + 3y = 220$, que equivale a $3y = 220 - 160$ e por isso $y = 20$.

d) No sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

podemos isolar o x na segunda equação e obter $x = 5+2y$. Substituindo esse valor de x na equação $2x - 4y = 10$, obtemos $2 \cdot (5 + 2y) - 4y = 10$. Isso equivale a $10 + 4y - 4y = 10$, ou seja, $10 = 10$. Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Observação adicional para ajudar a dar sentido à solução anterior. Do ponto de vista algébrico, as duas equações são equivalentes (a primeira é a segunda multiplicada por dois). Os pares ordenados (x, y) que satisfazem uma equação satisfazem a outra equação sempre que $10 = 10$, ou seja, sempre!

Do ponto de vista geométrico, as duas equações representam a mesma reta. Um ponto $P = (x, y)$ da reta representada por uma das equações, pertence à reta representada pela outra equação exatamente quando $10 = 10$, ou seja, sempre! Por isso o sistema é possível (existe solução) e indeterminado (são infinitas soluções).

e) Ao dividirmos ambos os membros da segunda equação do sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$$

por 3 obtém-se $2x - y = 5$. Isso significa que o sistema original é equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

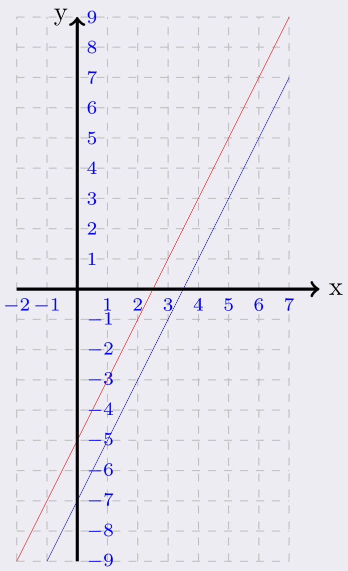
Repare que nenhum par (x, y) satisfaz as duas equações deste último sistema porque $7 \neq 5$. Portanto, o sistema não tem solução, é o que chamamos de sistema impossível.

Observação: Um outro caminho que poderia ser tomado é isolar o y na primeira equação para obter $y = 2x - 7$ e substituir na segunda equação $(6x - 3y = 15)$. Assim, obtém-se

$$6x - 3y = 15 \quad \Rightarrow \quad 6x - 3(2x - 7) = 15 \quad \Rightarrow \quad 6x - 6x + 21 = 15 \quad \Rightarrow \quad 21 = 15.$$

Isso significa que nenhum par ordenado de números reais (x, y) satisfaz as duas equações do sistema. Afinal de contas, quando escrevemos o sistema com o mesmo x e mesmo y nas duas equações estamos supondo que existem números reais x e y tais que $2x - y = 7$ **e também** $6x - 3y = 15$, mas isso implica no absurdo $21 = 15$, ou seja, não existem números reais x e y que satisfazem **as duas** equações do sistema.

Do ponto de vista geométrico, as equações representam retas no plano, digamos r e s e um par ordenado (x, y) que é solução do sistema representa um ponto, digamos P, que pertence a ambas as retas. O que vimos é que as retas r e s não se intersectam, isto é, não existe ponto P que pertença às duas retas. Concluímos que r e s são retas paralelas.



f) O sistema é

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 9y = -1 \end{cases}$$

Podemos , por exemplo, isolar o y na primeira equação, tendo como resultado: $3y = 2 - 2x$, logo $y = \frac{2-2x}{3}$.

Agora vamos utilizar o método da substituição. O próximo passo é substituir o valor encontrado para y na outra equação ($4x - 9y = -1$), e com isso obtemos:

$$4x - 9\frac{2-2x}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3(2-2x) = -1 \quad \Rightarrow \quad 4x + 6x = -1 + 6 \quad \Rightarrow \quad 10x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Por fim, vamos substituir o valor encontrado para "x"na equação $2x + 3y = 2$, obtendo assim: $2 \cdot (\frac{1}{2}) + 3y = 2$, que equivale a $3y = 2 - 1$ e significa que $y = \frac{1}{3}$.

g) Tomando o sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

Pode-se concluir que multiplicando a equação $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$ por (-1), ficamos com $-\sqrt{x} - \sqrt{y} = -8$. Com isso podemos montar um novo sistema, que será:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 13 \\ -\sqrt{x} - \sqrt{y} = -8 \end{cases}$$

Agora utilizaremos o método da adição, para isso somamos as equações obtidas e temos como resultado: $\sqrt{y} = 5$, então $y = 25$.

Substituindo o valor de y na equação $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 13$, por exemplo, teremos: $\sqrt{x} + 2\sqrt{25} = 13$,ou seja, $\sqrt{x} + 10 = 13$, logo $\sqrt{x} = 3$, então $x = 9$.

h) O sistema é:

$$\begin{cases} 13p - 92q = 237 \\ 12p - 91q = 237 \end{cases}$$

Ao observa-lo, podemos, por exemplo, isolar o p na segunda equação, ficando com $12p = 237 + 91q$, logo, $p = \dfrac{237}{12} + \dfrac{91q}{12}$.

Buscando utilizar o método da substituição, o próximo passo é substituir o valor encontrado para p na equação $13p - 92q = 237$, e com isso teremos:

$$13 \cdot (\frac{237}{12} + \frac{91q}{12}) - 92q = 237 \quad \Rightarrow \quad \frac{3081}{12} + \frac{1183q}{12} - 92q = 237$$

Para eliminar os denominadores, basta multiplicar ambos os lados por 12, então fica:

$$3081 + 1183q - 1104q = 2844 \quad \Rightarrow \quad 79q = -237 \quad \Rightarrow \quad q = -3.$$

Por fim, vamos substituir o valor encontrado para q na equação $12p - 91q = 237$, obtendo assim: $12p - 91 \cdot (-3) = 237$, ou seja $12p + 273 = 237$, que equivale a $12p = -36$, logo, $p = -3$.

i) O sistema dado é:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$$

Se multiplicarmos a equação $4x + y = 5$ por (-2), teremos $-8x - 2y = -10$. Com está equação podemos montar um novo sistema, que fica:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -8x - 2y = -10 \end{cases}$$

A partir dele utilizaremos o método da adição. Somando as equações, tem-se que: $-5x = -5$, então $x = 1$.

Substituindo o valor de x na equação $3x + 2y = 5$, por exemplo, teremos: $3 \cdot (1) + 2y = 5$, ou seja $2y = 2$, então $y = 1$.

Exercício 2. Como se sabe, as equações do tipo $ax + by = c$ representam retas no plano com um sistema de coordenadas. O sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

representa retas coincidentes, concorrentes ou paralelas? Se forem concorrentes, determine o ponto de interseção entre elas.

Solução:

Para determinar se essas equações representam retas coincidentes, concorrentes ou paralelas, podemos resolver o sistema linear utilizando o método da adição. Queremos eliminar uma das variáveis ao somar as equações de modo que possamos resolver a outra variável. Podemos notar que, se multiplicarmos a primeira equação por -2, obteremos $(-2)\cdot[2x+3y] = [-2]\cdot(-2)$, ou seja, $-4x-6y=4$. Agora podemos voltar ao sistema e efetuar a adição. Assim teremos

$$\begin{cases} -4x - 6y = 4 \\ 4x - 6y = 12. \end{cases}$$

Ao somar a primeira equação com a segunda obteremos que $-12y = 16$, logo $y = \dfrac{16}{-12} = -\dfrac{4}{3}$.
Agora que encontramos o valor de y, podemos substituí-lo de volta em uma das equações originais para encontrar o valor de x. Vamos usar a primeira equação: $2x + 3\cdot(-\frac{4}{3}) = -2$. Teremos então que $2x - 4 = -2$, logo $2x = 2$ então $x = 1$.
Como encontramos uma única solução que foi o par ordenado $(1, -\frac{4}{3})$, concluímos que elas possuem apenas um ponto de interseção, logo são concorrentes.

Exercício 3. Ao estudarmos sistemas lineares, nos deparamos com as seguintes classificações: Sistema Possível e Determinado (SPD); Sistemas Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI). Com base nessas classificações, assinale a única alternativa correta.

a) O sistema impossível possui infinitas soluções.

b) O sistema possível e determinado possui infinitas soluções.

c) O sistema possível e indeterminado possui infinitas soluções.

d) O sistema possível e indeterminado possui uma única solução.

Solução:

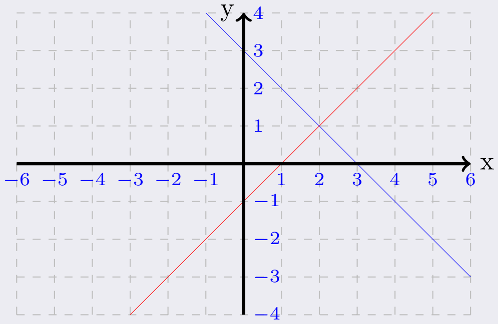
A alternativa correta é a letra C.
Análise e correção das alternativas restantes:
a) O sistema impossível não possui solução, pois é representado por um par de retas paralelas e não coincidentes.
b) O sistema possível e determinado possui apenas uma solução, pois é representado por um par de retas concorrentes, ou seja, se intersectam em apenas um ponto.
d) O sistema possível e indeterminado possui infinitas soluções, pois é representado por um par de retas coincidentes.

Exercício 4. Resolva graficamente os sistemas abaixo:

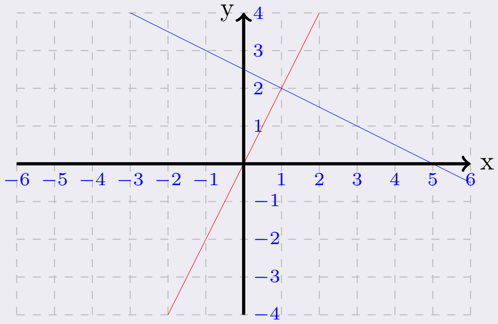
a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Solução:

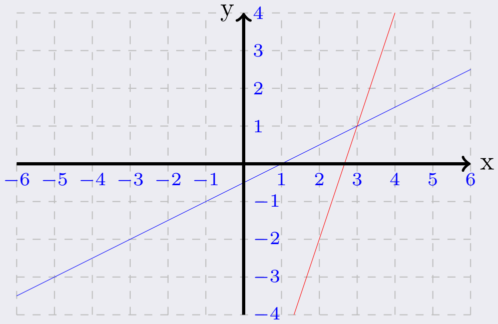
a) Seja $x+y=3$ a reta representada em azul e $x-y=1$ a reta representada em vermelho. Pelo gráfico podemos observar que elas são concorrentes e seu ponto de interseção é $(2,1)$. Com isso, é possível concluir que o ponto $(2,1)$ satisfaz as duas equações e é a única solução do sistema.



b) Seja $x+2y=5$ a reta representada em azul e $2x-y=0$ a reta representada em vermelho. Pelo gráfico podemos observar que elas são concorrentes e seu ponto de interseção é $(1,2)$. Com isso, é possível concluir que o ponto $(1,2)$ satisfaz as duas equações e é a única solução do sistema.



c) Seja $3x-y=8$ a reta representada em azul e $x-2y=1$ a reta representada em vermelho. Pelo gráfico podemos observar que elas são concorrentes e seu ponto de interseção é $(3,1)$. Com isso, é possível concluir que o ponto $(3,1)$ satisfaz as duas equações e é a única solução do sistema.



Exercício 5. Para qual valor de t o sistema

$$\begin{cases} (t+2)x + 4y = 1 \\ -x + (t-3)y = -1 \end{cases}$$

é possível e indeterminado?

Solução:

Para que o sistema seja possível e indeterminado, as retas precisam ser coincidentes. Para isso, temos que encontrar um t tal que os coeficientes de x e y sejam iguais em cada reta. Isso significa dizer que o coeficiente de x da segunda equação é 1, então o da primeira também precisa ser, 3 Se o coeficiente de y da primeira equação é 4, então o da segunda equação também será.

Vamos multiplicar a segunda equação por -1 para que possamos ter as duas equações iguais a 1. Teremos que $(-1) \cdot [-x + (t-3)y] = [-1] \cdot (-1)$, logo $x - (t-3)y = 1$. Agora, voltando para o sistema podemos utilizar a nova equação

$$\begin{cases} (t+2)x + 4y = 1 \\ x - (t-3)y = 1. \end{cases}$$

Como precisamos que os coeficientes de x e y em cada equação sejam iguais para que o sistema seja possível e indeterminado, então $(t+2) = 1$ e $-(t-3) = 4$. Portanto, $t = 1$ faz com que as retas sejam coincidentes, ou seja, torna o sistema possível e indeterminado.