CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

UNIRIO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Curso: PROTES **Professores:** Fabio Simas e Ronaldo Busse

Disciplina: Pré-Cálculo **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - EQUAÇÃO DA RETA (GABARITO)

Exercício 1. Em cada item, encontre uma equação para a reta que cumpre as condições dadas:

a) Passa por $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$.

b) Passa por $C = (0, 1)$ e $D = (8, 5)$.

c) Passa por $E = (2, 0)$ e $F = (-4, 10)$.

d) Tem coeficiente angular 2 e passa por $G = (0, 0)$.

e) Tem coeficiente angular 3 e passa por $H = (1, 2)$.

Solução:

A equação reduzida da reta tem a forma $y = ax + b$ onde "a" é coeficiente angular e "b" é o coeficiente linear. O coeficiente angular é a variação em y dividida pela variação em x, isto é ($a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$). O coeficiente linear "b" pode ser calculado pela substituição de um ponto na equação da reta já com o coeficiente angular calculado e substituído na equação reduzida.

a) $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-2}{3-1} = \dfrac{2}{2}=1.$

Substituindo a na equação da reta temos que $y = 1 \cdot x + b$, ou seja, $y = x + b$. Agora, podemos substituir qualquer um dos dois pontos na equação que obtemos. Neste caso, iremos utilizar as coordenadas de A por facilidade. Assim substituindo o ponto $A = (1, 2)$ em $y = x + b$ obtemos

$$2 = 1 + b \quad \text{e, portanto,} \quad b = 1.$$

Logo, a equação da reta que passa por esses dois pontos é $y = x + 1$.

Uma vez obtida a equação, você sempre pode substituir as coordenadas dos pontos que sabe que pertencem à reta para conferir a solução. Afinal, o ponto pertence à reta se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação da reta.

b) $a = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{5-1}{8-0} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}.$

Substituindo a na equação da reta temos que $y = \frac{1}{2}x + b$ ou $y = \frac{x}{2} + b$

Assim substituindo o coeficiente angular e o ponto $C = (0, 1)$, por exemplo, em $y = \frac{x}{2} + b$ teremos:

$$1 = \frac{0}{2} + b \quad \text{e, portanto,} \quad b = 1.$$

Logo, a equação da reta que passa por esses dois pontos é $y = \frac{x}{2} + 1$.

c) $a = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{10 - 0}{(-4) - 2} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$. Substituindo a na equação da reta temos que $y = -\frac{5}{3}x + b$ ou $y = -\frac{5x}{3} + b$. Assim substituindo o coeficiente angular e o ponto $E = (2, 0)$, por exemplo, em $y = -\frac{5}{3}x + b$ teremos:

$$0 = -\frac{5}{3} \cdot 2 + b \quad \text{e, portanto,} \quad b = \frac{10}{3}.$$

Logo, a equação da reta que passa por esses dois pontos é $y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$.

d) Neste item, já é dado o coeficiente angular $(a = 2)$, logo a equação tem a seguinte forma: $y = 2x + b$. Agora é necessário calcular o coeficiente linear através da substituição do ponto $G = (0, 0)$ na equação obtida $y = 2x + b$. Assim teremos:

$$0 = 2 \cdot 0 + b \quad \text{e, portanto,} \quad b = 0.$$

Logo, a equação da reta que possui essa inclinação e passa pelo ponto dado é $y = 2x$.

e) Neste item, já é dado o coeficiente angular $(a = 3)$, logo a equação tem a seguinte forma: $y = 3x + b$. Agora é necessário calcular o coeficiente linear pela substituição do ponto $H = (1, 2)$ na equação obtida $y = 3x + b$. Assim teremos:

$$2 = 3 \cdot 1 + b \qquad 2 - 3 = b \quad \text{e, portanto,} \quad b = -1.$$

Logo, a equação da reta que possui essa inclinação e passa pelo ponto dado é $y = 3x - 1$.

Exercício 2. Encontre as interseções das retas com os eixos coordenados (com os eixos x e eixo y).

a) $y = x + 1$ b) $y = -2x + 8$ c) $y = -\frac{3}{2}x + 6$ d) $x - 2y = 6$ e) $-2x + y = 3$

Solução:

Nesta solução usaremos a linguagem “intercepto-x” e o “intercepto-y”. O intercepto-x de uma reta é a interseção dessa reta com o eixo x, enquanto o intercepto-y, é o ponto de interseção da reta com o eixo y. Os pontos do eixo x têm coordenadas $(x, 0)$. Os pontos do eixo y são do tipo $(0, y)$. Logo os pontos que estamos buscando neste exercício são da forma $(x, 0)$ e $(0, y)$.

a) Para encontrar o intercepto-x, basta substituir y por zero na equação $y = x + 1$. Fica $0 = x + 1$, de onde conclui-se que $x = -1$. Logo, o intercepto-x é o ponto $(-1, 0)$.
Para encontrar o intercepto-y, basta substituir x por zero na equação $y = x + 1$. Fica $y = 0 + 1$, de onde conclui-se que $y = 1$. Logo, o intercepto-y é o ponto $(0, 1)$.

b) Para encontrar o intercepto-x, basta substituir y por zero na equação $y = -2x + 8$. Assim teremos $0 = -2x + 8, \quad 2x = 8$ de onde conclui-se que $x = 4$. Logo, o intercepto-x é no ponto $(4, 0)$.
Para encontrar o intercepto-y, basta substituir x por zero na equação $y = -2x + 8$. Fica $y = 2 \cdot 0 + 8$,

de onde conclui-se que $y = 8$. Logo, o intercepto-y é o ponto $(0, 8)$.

c) Para encontrar o intercepto-x, basta substituir y por zero na equação $y = \frac{3}{2}x + 6$. Obtendo assim $0 = -\frac{3}{2}x + 6, \quad \frac{3}{2}x = 6, \quad 3x = 12$ então $x = 4$. Logo, o intercepto-x é no ponto $(4, 0)$.

Para encontrar o intercepto-y, basta substituir x por zero na equação $y = -\frac{3}{2}x + 6$. Sendo assim $y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 6$, ou seja $y = 6$. Logo, o intercepto-y é no ponto $(0, 6)$.

d) Para encontrar o intercepto-x, basta substituir y por zero na equação $x - 2y = 6$, ou seja, $x - 2 \cdot 0 = 6$, consequentemente $x = 6$. Logo, o intercepto-x é no ponto $(6, 0)$.

Para encontrar o intercepto-y, basta substituir x por zero na equação $x - 2y = 6$ e assim temos que $0 - 2y = 6$, ou seja, $y = -\frac{6}{2} = -3$. Portanto, o intercepto-y é no ponto $(0, -3)$.

e) Para encontrar o intercepto-x, basta substituir y por zero na equação $-2x + y = 3$, ou seja, $-2x + 0 = 3$, então conclui-se que $x = -\dfrac{3}{2}$. Logo, o intercepto-x é no ponto $(-\frac{3}{2}, 0)$.

Para encontrar o intercepto-y, basta substituir x por zero na equação $-2x + y = 3$. Obtendo assim $-2 \cdot 0 + y = 3$, então $y = 3$. Logo, o intercepto-y é no ponto $(0, 3)$.

Exercício 3. Transforme as equações da forma geral para a forma reduzida. Isto é, passe para a forma $y = ax + b$.

a) $2x + 5y + 10 = 0$ b) $-x + 7y + 7 = 0$ c) $2x - 3y - 6 = 0$

Solução:

Toda reta tem uma equação que a representa e que pode aparecer de diversas formas, mas é importante perceber que são apenas manipulações algébricas de uma única equação. Sua forma reduzida é $y = ax + b$.

a) $2x + 5y + 10 = 0$

$5y = -2x - 10$

$y = -\frac{2}{5}x - \frac{10}{5}$

$y = -\frac{2}{5}x - 2.$

b) $-x + 7y + 7 = 0$

$7y = x - 7$

$y = \frac{1}{7}x - \frac{7}{7}$

$y = \frac{1}{7}x - 1.$

c) $2x - 3y - 6 = 0$

$-3y = -2x + 6$

$3y = 2x - 6$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$

$y = \frac{2}{3}x - 2.$

Exercício 4. A reta r forma um ângulo de $30°$ com o eixo das abscissas e intersecta o eixo das ordenadas em $(0, 2)$, determine a equação reduzida dessa reta.

Solução:

O coeficiente angular de uma reta pode ser calculado através da tangente que a mesma forma com o eixo x, então temos que:

$$\text{Coeficiente angular} = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \text{coeficiente linear} = \text{intercepto-y} = 2.$$

Logo, a equação reduzida dessa reta é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

Exercício 5. Determine o valor de A para que $P = (-1, 1)$, $Q = (4, 6)$ e $R = (3, A)$ sejam colineares.

* Três ou mais pontos são colineares quando pertencem a uma mesma reta

Solução:

Lembre-se que o ponto R pertence à reta PQ se, e somente se, as coordenadas de R satisfazem a equação da reta PQ.

O coeficiente angular da reta PQ é

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{6 - 1}{4 - (-1)} = \frac{5}{5} = 1.$$

Para calcular o coeficiente linear basta substituir um dos pontos na equação obtida $y = x + b$, como por exemplo, o ponto $P = (-1, 1)$:

$$1 = -1 + b \quad \text{e, portanto,} \quad b = -1.$$

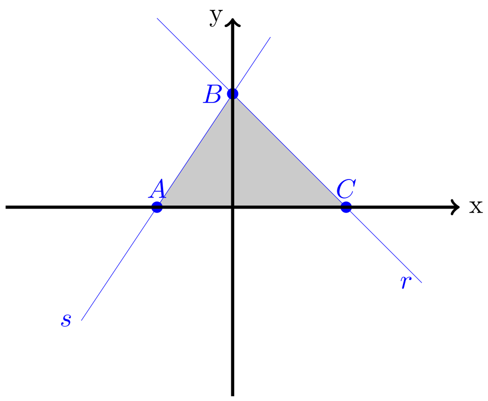
Logo, a equação desta reta é $y = x - 1$.

Para que o ponto $R = (3, A)$ seja colinear com os outros dois, suas coordenadas precisam satisfazer a equação da reta PQ, isto é, $y = x - 1$:

$$A = 3 - 1 \quad \text{então,} \quad A = 2.$$

Portanto, concluímos que para P, Q e R sejam colineares, devemos ter $A = 2$.

Exercício 6. Sejam r e s as retas cujas equações são, respectivamente, $y = -x + 3$ e $y = \frac{3x}{2} + 3$. Sabendo que A e C são pontos de interseção de s e r, respectivamente, com o eixo x e que B é a interseção de r e s, calcule a área do triângulo ABC.



Solução:

Vamos encontrar as coordenadas dos pontos A, B e C.

O ponto A pertence ao eixo x, então é um ponto do tipo $A = (x, 0)$. Ele também pertence à reta s, então $y = \frac{3x}{2} + 3$. Como $y = 0$, temos $0 = \frac{3x}{2} + 3$, logo $x = -2$. Isto é, $A = (-2, 0)$.

O ponto C também pertence ao eixo x, então é do tipo $B = (x, 0)$. E também pertence à reta r, então $y = -x + 3$. Como $y = 0$, temos $0 = -x + 3$, de onde se obtém que $x = 3$. Portanto, $B = (3, 0)$.

O ponto B pertence tanto a r como a s. A figura sugere que B também pertence ao eixo y. Como os interceptos-y de r e de s são ambos $(0, 3)$, pois seus coeficientes lineares são ambos $b = 3$. Portanto, $B = (0, 3)$.

Considerando AC como base do triângulo, a altura será OB. Como se sabe, a área da triângulo é $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$. Temos $AC = |3 - (-2)| = 5$ e $OB = |3 - 0| = 3$. Portanto, a área do triângulo é

$$\frac{AC \cdot OB}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}.$$