CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)
ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

Curso: PROTES **Professores:** Fabio Simas e Ronaldo Busse
Disciplina: Pré-Cálculo **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - DISTÂNCIA ENTRE PONTOS (GABARITO)

Exercício 1. Calcule a distância entre os pontos dados a seguir. Se possível, evite usar fórmulas.

a) $A = (1, 3)$ e $B = (1, 1)$.

b) $A = (3, 2)$ e $B = (-2, 2)$.

c) $A = (1, 3)$ e $B = (-3, 1)$.

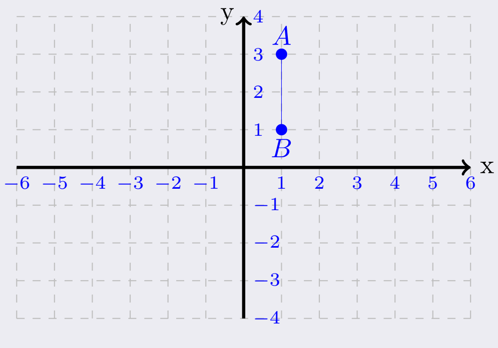
d) $A = (4, 3)$ e $B = (-2, 4)$.

e) $P = (3, -4)$ à origem do sistema cartesiano.

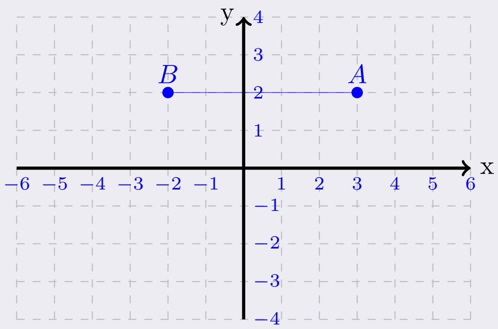
Solução:

a) Os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (1, 1)$ estão representados na imagem a seguir. Como A e B possuem a mesma coordenada x, temos $AB = |y_A - y_B|$ é a distância entre A e B. O módulo serve para o sinal seja sempre não-negativo, afinal, estamos calculando uma distância.

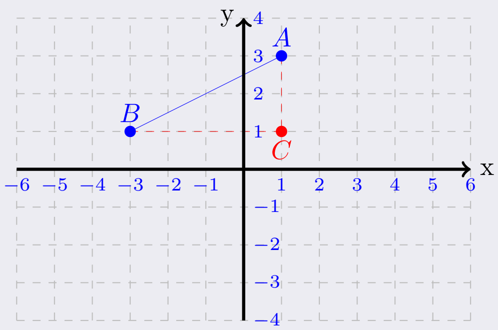
Sabemos que $y_A = 3$ e $y_B = 1$, então $|y_A - y_B| = |3 - 1| = 2$.



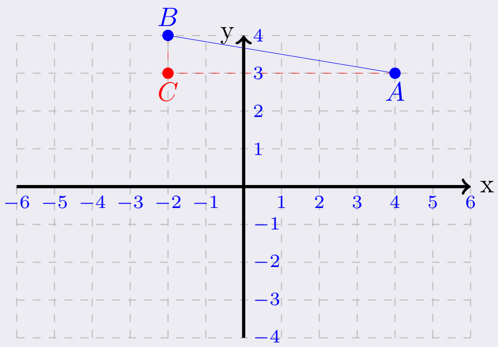
b) Os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (-2, 2)$ estão representados na imagem a seguir. Ao contrário do exercício anterior, A e B possuem a coordenada y em comum. Para calcular a distância entre esses pontos, basta diminuir $|x_A - x_B|$ pois $|y_A - y_B| = 0$. Como o enunciado diz que $x_A = 3$ e $x_B = 1$, então $|x_A - x_B| = |3 - (-2)| = 5$.



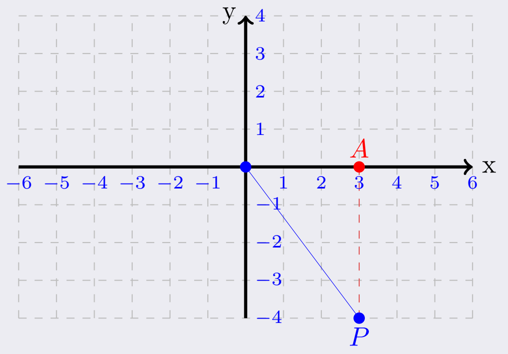
c) Os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-3, 1)$ estão representados na imagem a seguir. Nela representamos também o ponto $C = (1, 1)$ para formar o triângulo retângulo ABC. Com isso, é possível reconhecer os catetos e então usar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa AB. O cateto BC mede $|x_A - x_B| = |1 - (-3)| = 4$ e o cateto AC mede $|y_A - y_B| = |3 - 1| = 2$. O Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC afirma que $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Isto é, $AB^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$, ou seja, $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



d) Os pontos $A = (4, 3)$ e $B = (-2, 4)$ estão representados na imagem a seguir. Nela representamos também o ponto $C = (-2, 3)$ para formar o triângulo retângulo ABC. Com isso, é possível reconhecer os catetos e então usar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa AB. As medidas dos catetos são $AC = |x_A - x_B| = |4 - (-2)| = 6$ e $BC = |y_A - y_B| = |3 - 4| = 1$. Utilizando o Teorema de Pitágoras temos $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 1^2$. Portanto, $AB^2 = 36 + 1$, ou seja, $AB = \sqrt{37}$.



e) Os pontos $P = (3, -4)$ e a origem $O = (0, 0)$ estão representados na imagem a seguir. Na figura representamos também o ponto auxiliar $A = (3, 0)$ para formar o triângulo retângulo POA. O Teorema de Pitágoras afirma que $PO^2 = PA^2 + AO^2$. Os comprimentos dos catetos PA e AO são mais fáceis de calcular. Temos $AO = |x_P - x_O| = |3 - 0| = 3$ e $PA = |y_P - y_O| = |(-4) - 0| = 4$. Utilizando o Teorema de Pitágoras obtemos $PO^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, ou seja, $PO = \sqrt{25} = 5$.



Exercício 2. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo dados $A = (3, 1)$, $B = (-3, 1)$ e $C = (-1, 4)$.

Solução:

Os pontos $A = (3, 1)$ e $B = (-3, 1)$ e $C = (-1, 4)$ estão representados na imagem a seguir.

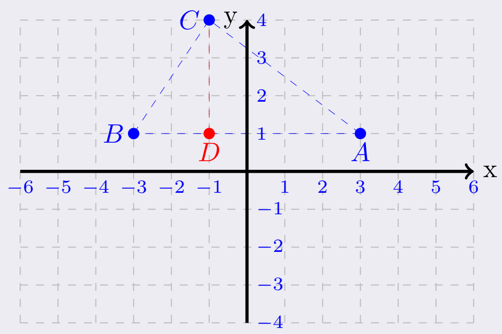
O perímetro do triângulo ABC é dado por $AB + BC + CA$. Para podermos efetuar essa soma, precisamos saber os respectivos tamanhos de cada segmento. Para isso, vamos definir $D = (-1, 1)$. Assim, conseguiremos dividir o triângulo ABC em dois triângulos retângulos DBC e DCA para então utilizar o Teorema de Pitágoras e conseguir determinar o perímetro.

Podemos ver que a distância de A para B dada por $AB = |x_A - x_B| = |3 - (-3)| = 6$

Para determinar BC e CA vamos utilizar o Teorema de Pitágoras. No triângulo DBC temos $BC^2 = BD^2 + CD^2$, logo $BC^2 = (-3 - (-1))^2 + (4 - 1)^2 = 2^2 + 3^2 = 13$ e $BC = \sqrt{13}$.

No triângulo DCA temos $CA^2 = CD^2 + AD^2$, logo $CA^2 = (4 - 1)^2 + (3 - (-1))^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ e $CA = 5$.

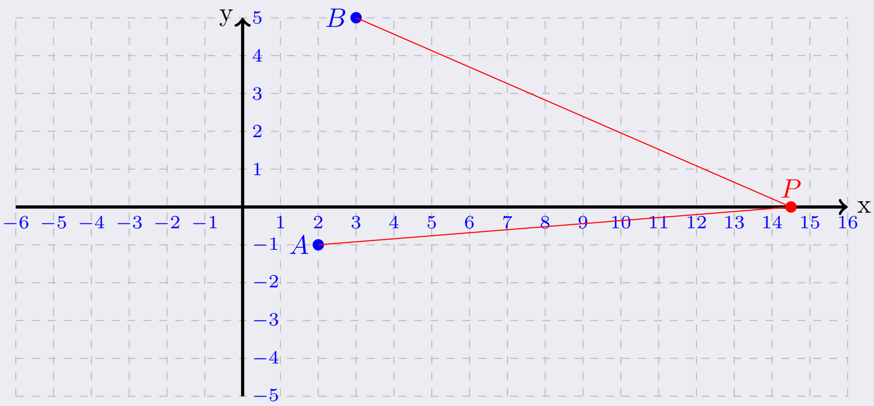
Somando $AB + BC + CA$, temos $\sqrt{13} + 6 + 5 = 10 + \sqrt{13}$ que é o perímetro do triângulo ABC.



Exercício 3. Determine o ponto P, do eixo das abscissas, sabendo que é equidistante dos pontos $A = (2, -1)$ e $B = (3, 5)$.

Solução:

Como P pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são do tipo $P = (x_P, 0)$. Como P é equidistante de A e de B, temos que $PA = PB$.



A distância PA é dada por $PA = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$. Substituindo os valores conhecidos, obtemos $PA = \sqrt{(x_P - 2)^2 + ((-1) - 0)^2} = \sqrt{x_P^2 - 4x_P + 5}$. Por outro lado, $PB = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(x_P - 3)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{x_P^2 - 6x_P + 34}$.

Como $PA = PB$, temos

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x_P^2 - 4x_P + 5} & = & \sqrt{x_P^2 - 6x_P + 34} & \text{(eleve os dois lados ao quadrado)} \\ x_P^2 - 4x_P + 5 & = & x_P^2 - 6x_P + 34 & \text{(subtraia } x_P^2 \text{ dos dois lados)} \\ -4x_P + 5 & = & -6x_P + 34 & \text{(dos dois lados adicione } 6x - 5) \\ 6x_P - 4x_P & = & 34 - 5 & \\ 2x_P & = & 29 & \\ x_P & = & \frac{29}{2}. & \end{array}$$

Portanto, $P = (\frac{29}{2}, 0)$.

Exercício 4. Dados $A = (a, 1)$, $B = (-1, 4)$ e $C = (5, 2)$, obtenha a de modo que A seja equidistante de B e C.

Solução:

Como o enunciado diz que $A = (a, 1)$ deve ser equidistante a B e a C, isso significa dizer que devemos encontrar a coordenada x de A cuja distância de A a B é a mesma que de A a C, ou seja, $AB = AC$.

O ponto A pertence à reta $y = 1$ e obedece à condição $AB = AC$.

Para isso podemos calcular a distância de A até B usando $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Substituindo, temos $AB = \sqrt{(a - (-1))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + 9}$. A distância de A a C encontramos da mesma forma: $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$, logo $AC = \sqrt{(a - 5)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(a - 5)^2 + 1}$.

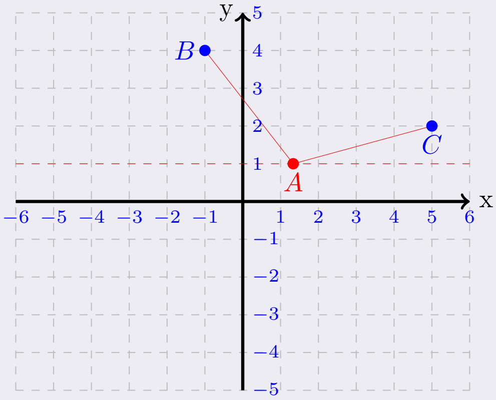
Como $AB = AC$, temos que $\sqrt{(a - (-1))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(a - 5)^2 + (1 - 2)^2}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(a-(-1))^2+(1-4)^2} &= \sqrt{(a-5)^2+(1-2)^2} && \text{(eleve os dois lados ao quadrado)}\\
(a-(-1))^2+(1-4)^2 &= (a-5)^2+(1-2)^2 && \text{(efetue as operações dos parênteses)}\\
(a+1)^2+(-3)^2 &= (a-5)^2+(-1)^2 && \text{(resolva as potências)}\\
a^2+2a+1+9 &= a^2-10a+25+1 &&\\
a^2+2a+10 &= a^2-10a+26 && \text{(subtraia } \mathbf{a^2} \text{ dos dois lados)}\\
2a+10 &= -10a+26 && \text{(subtraia 2a+10 dos dois lados)}\\
0 &= -12a+16 &&
\end{aligned}
$$

$$12a = 16$$

$$a = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

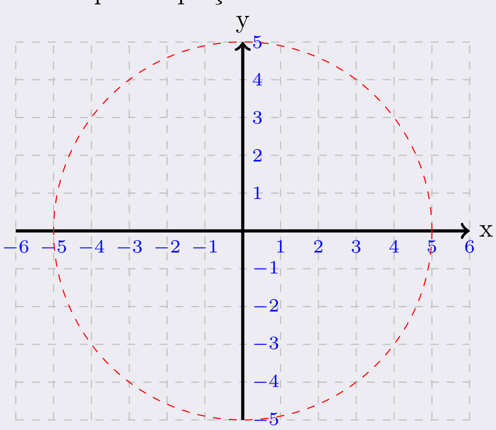
Logo $A = (\frac{4}{3}, 1)$.



Exercício 5. Onde vivem os pontos $P = (x, y)$ que distam 5 de $O = (0, 0)$? Ou seja, encontre uma equação que as coordenadas de P precisam satisfazer para cumprir a condição. Dica: use o fato de que $PO = 5$.

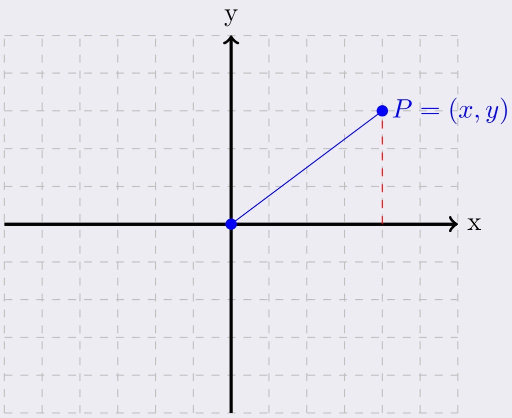
Solução:

Podemos observar que o conjunto dos pontos P tais que $PO = 5$ é uma circunferência de raio 5 e centro em O e que a equação a ser encontrada é a equação dessa circunferência.



Imagine uma posição genérica para o ponto P, como na figura a seguir. Podemos utilizar o Teorema de Pitágoras pois já sabemos o valor da hipotenusa do triângulo que mede 5. As medidas dos catetos são

$|x_P - x_O| = |x - 0| = |x|$ e $|y_P - y_O| = |y - 0| = |y|$. Agora que descobrimos a medida dos catetos, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim temos que $5^2 = x^2 + y^2$.



Com isso, podemos concluir que os pontos $P = (x, y)$ que distam 5 da origem satisfazem a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

Exercício 6. Dados os pontos $B = (2, 3)$ e $C = (-4, 1)$, determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo y do qual se vê BC sob ângulo reto.

Solução:

De acordo com o enunciado A é um ponto do eixo y, isso significa que $A = (0, b)$, e como o triângulo ABC tem ângulo reto em A, satisfaz o Teorema de Pitágoras no qual $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (veja figura a seguir). Como as coordenadas de B e C são conhecidas, podemos calcular BC^2. De fato,

$$BC^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = [2 - (-4)]^2 + (3 - 1)^2 = 40.$$

Fazendo o mesmo para os segmentos AB e AC, obtemos

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (0 - 2)^2 + (b - 3)^2 = (b - 3)^2 + 4 \quad \text{e}$$

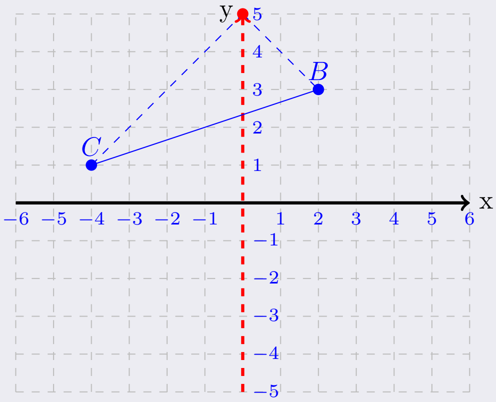
$$AC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = [0 - (-4)]^2 + (b - 1)^2 = (b - 1)^2 + 16.$$

Agora podemos substituir os valores que encontramos em $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Assim, obtemos a seguinte expressão: $40 = [(b-3)^2+4]+[(b-1)^2+16]$. Resolvendo a equação fica

$$\begin{gathered}
[(b-3)^2+4]+[(b-1)^2+16] = 40\\
(b^2-6b+9)+4+(b^2-2b+1)+16 = 40\\
b^2-6b+13+b^2-2b+17 = 40\\
2b^2-8b-10 = 0\\
b^2-4b-5 = 0\\
b = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4(-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}\\
b = 5 \quad \text{ou} \quad b = -1.
\end{gathered}$$

Ou seja, temos dois casos no qual o triângulo ABC é retângulo e obedece as condições do enunciado: $A = (0,-1)$ ou $A = (0,5)$.

Caso 1



Caso 2