CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CET)
ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

Curso: PROTES **Professores:** Fabio Simas e Ronaldo Busse
Disciplina: Pré-Cálculo **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - CONCEITO E LINGUAGEM DE FUNÇÕES REAIS (PARTE 1) (GABARITO)

Exercício 1. Considere as funções f, g, k e h, todas de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

$$f(x) = 3x^2 + 5x \quad ; \quad g(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \quad ; \quad k(x) = (x-2)^2 + 6 \quad ; \quad h(x) = 2x - 7$$

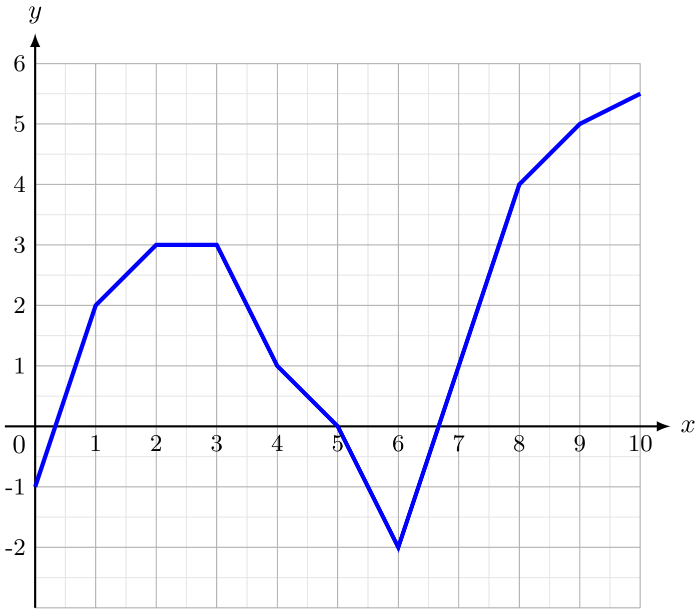
Resolva os itens a seguir, determinado os valores indicados:

a) $f(3)$
b) $g(-1)$
c) $k(2)$
d) $f(1) + g(1)$
e) $g(2) - k(-1)$
f) $k(0) \cdot f(-2)$
g) $f(0) + h(0) - 1$
h) $f(-2) \cdot g(-2) + k(2)$
i) $\dfrac{f(-3)}{k(0)}$
j) a para o qual $h(a) = 0$
k) b para o qual $h(b) = 3$
l) c para o qual $k(c) = 15$

Solução:

a) $f(3) = 42$
b) $g(-1) = \frac{-1}{2}$
c) $k(2) = 6$
d) $f(1) + g(1) = 8$
e) $g(2) - k(-1) = \frac{-104}{7}$
f) $k(0) \cdot f(-2) = 20$
g) $f(0) + h(0) - 1 = -8$
h) $f(-2) \cdot g(-2) + k(2) = \frac{36}{7}$
i) $\dfrac{f(-3)}{k(0)}$
j) $a = \frac{7}{2}$
k) $b = 5$
l) $c = -1$ ou $c = 5$

Exercício 2. Seja $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ a função real cuja representação gráfica é apresentada na figura.



A partir da representação gráfica calcule o valor das seguintes expressões:

a) $f(1) - f(0)$;

b) $4 \cdot f(3)$;

c) $\dfrac{f(4)}{f(2)}$;

d) $f(6) \cdot f\left(\dfrac{5}{2}\right)$;

e) x para o qual $f(x) = -2$;

f) x para o qual $f(x) = 4$;

g) $f(3 \cdot 2) - 4 \cdot f\left(\sqrt{81}\,\right) + 1$.

Solução:

a) 3;

b) 12;

c) $\dfrac{1}{3}$;

d) -6;

e) $x = 6$;

f) $x = 8$;

g) -21.

Exercício 3. Considere a seguinte lista de expressões algébricas.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $G(z) = \sqrt{z-5}$

c) $h(s) = \frac{1}{3-s}$

d) $J(t) = \frac{1}{t+8}$

e) $T(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $R(x) = (x-2)^2 + 7$

g) $g(u) = 5u^2 + 8$

h) $F(x) = (x+1)^2 - 3$

Veja que, em algumas das expressões, a variável independente não pode assumir alguns valores, por exemplo, na letra a) x não pode assumir valores negativos. Complete a tabela abaixo com o maior conjunto domínio possível que cada uma das funções pode ter e o correspondente conjunto imagem.

Expressão	domínio A	Imagem
(a)	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
(b)	$z \geq 5$	$\mathbb{R}^+$
(c)	$s \neq 3$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
(d)	$\mathbb{R} \setminus \{-8\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
(e)	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
(f)	$\mathbb{R}$	$[7, +\infty[$
(g)	$\mathbb{R}$	$[8, +\infty[$
(h)	$\mathbb{R}$	$[-3, +\infty[$

Exercício 4. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 9 - x^2$.

a) Coloque em ordem crescente os números $g(\sqrt{2})$, $g(\sqrt{5})$ e $g(\sqrt{10})$.

b) Determine todos os possíveis valores de x do domínio que têm imagem igual a 8.

c) Existe algum $x \in \mathbb{R}$ cuja imagem é igual a 10? Por quê?

d) Que condição deve satisfazer um número real b para que seja a imagem de algum número real x, isto é, $b = g(x)$?

Solução:

a) Substituindo os valores de x na expressão $g(x) = 9 - x^2$ obtém-se $g(\sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$, $g(\sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$ e $g(\sqrt{10}) = 9 - 10 = -1$. Ordenando os três valores na ordem crescente obtém-se -1, 4 e 7 ou $g(\sqrt{10})$, $g(\sqrt{5})$ e $g(\sqrt{2})$.

b) Buscamos x tal que $g(x) = 8$. Isto é, $9 - x^2 = 8$. Essa última igualdade equivale a $x^2 = 1$, isto é $x = \pm 1$. Portanto, os únicos valores de x tais que $g(x) = 8$ são $x = 1$ e $x = -1$. Tem-se $g(-1) = g(1) = 8$

c) Não existe porque o quadrado de qualquer número real é um número maior que ou igual a zero. Assim, na expressão $g(x) = 9 - x^2$, o valor de $-x^2$ é menor que ou igual a zero. Somando 9, obtém-se um valor menor que ou igual a 9. Portanto, a função g não tem imagens maiores que 9.

d) Na solução do item anterior, explicamos que $b \leq 9$. Agora mostraremos que qualquer $b \leq 9$ é imagem da função g. De fato, dado $b \leq 9$, basta tomar $a = \sqrt{9 - b}$ para se obter $g(a) = b$. Como $b \leq 9$, sempre é possível obter a tal que $g(a) = b$. Conclusão: qualquer número real $b \leq 9$ pertence à imagem da função g.

Exercício 5. Vimos que para que uma relação de A em B seja uma função não pode haver:

(I) Elementos no conjunto A sem correspondente em B;

(II) Ambiguidade na determinação de correspondente em B.

Determine se cada uma das relações apresentadas a seguir é função. Justifique suas respostas a partir das condições (I) e (II).

a) Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as pessoas e considere a relação de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$, que a cada "pessoa" associa "irmão da pessoa".

b) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e considere a relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada "número real x" associa "raiz quadrada do número real x".

c) Sejam $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos e $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os triângulos. Considere a relação de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{T}$ que a cada "número real positivo x" associa "triângulo de área x".

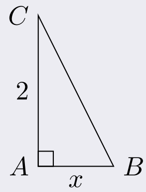
Solução:

a) Para a relação dada valem tanto a condição (I) como a condição (II). Portanto, a relação não é função. De fato, se uma pessoa (elemento de $\mathcal{P}$) não tem irmão, então não existe, no conjunto $\mathcal{P}$, um correspondente para esta pessoa, logo vale a condição (I). Além disso, se uma pessoa tem dois irmãos, então existe ambiguidade na determinação do correspondente, logo vale a condição (II).

b) Vale (I). Por exemplo, o elemento $-1 \in \mathbb{R}$ não possui correspondente $\sqrt{-1}$ em $\mathbb{R}$ pois o quadrado de qualquer número real é um número não-negativo (lembre-se que menos vezes menos é mais e mais vezes mais é mais). O mesmo serve para qualquer número real negativo. Assim, a relação não é função.

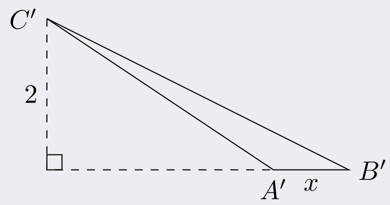
Não existe ambiguidade na determinação de correspondente pela raiz quadrada. É necessário esclarecer que, por definição, a raiz quadrada de um número real não-negativo x é o único número real não-negativo y tal que $x = y^2$. Por exemplo, é comum as pessoas confundirem o valor de $x = \sqrt{4}$, que é $x = 2$ com as soluções da equação $x^2 = 4$, que são $x = \pm 2$.

c) Dado qualquer número real positivo x é possível construir um triângulo ABC como o da figura que tem área x.



Portanto, todo elemento $x \in \mathbb{R}^+$ tem um correspondente em $\mathcal{T}$ pela relação estabelecida. Assim, não vale (I).

Por outro lado, é possível construir outro triângulo, digamos $A'B'C'$, como na figura a seguir, que não é igual (congruente) ao anterior e também tem área x. Portanto, vale (II).



Exercício 6. Considere a função f que a *cada número natural associa a soma de seus algarismos.*

a) Determine o domínio e o contradomínio dessa função.

b) Qual é a imagem de 13717 por essa função?

c) Proponha um número cuja imagem por f seja 22.

d) Quantos números entre 1 e 10000 têm como imagem o número 3?

e) Todo número natural pertence à imagem de f? Explique.

f) Mostre que existem infinitos números naturais cuja imagem por f é 2.

Solução:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

b) O número natural 13717 será associado à soma de seus algarismos, isto é, será associado ao número

$$1 + 3 + 7 + 1 + 7 = 19.$$

c) Proponho o número 499 pois $4 + 9 + 9 = 22$.

d) O número 3 pode ser escrito como a soma de números inteiros não negativos $1 + 2$ ou $3 + 0$. Uma forma de contar é listar todas as possibilidades:

3	12	21	111
30	120	210	1011
300	102	201	1101
3000	1200	2100	1110
	1020	2010	
	1002	2001	

Portanto, são 20 os números que levam ao resultado 3.
Observe que isso determina uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que que associa *cada número natural à soma de seus algarismos.*

e) Sim, seja dado um número natural b, basta considerar o número natural formado exatamente por b dígitos iguais a 1. Por exemplo, se $b = 10$, tome $a = 1111111111$. Desta forma b é o correspondente de a pelo processo descrito.

f) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número natural $a_n = 2 + 10^{n+1}$. Observe que $f(a_n) = 2$ para todo n.

Todos os exercícios foram retirados do Livro Aberto de Matemática. Uma iniciativa da OBMEP/IMPA financiada pela Fundação Itaú Social.