CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

Curso: PROTES **Disciplina:** Pré-Cálculo **Professores:** Fabio Simas e Ronaldo Busse

LISTA DE EXERCÍCIOS - COORDENADAS NO PLANO (GABARITO)

Exercício 1. Represente graficamente os subconjuntos do plano formados pelos pontos $P = (x, y)$ tais que:

a) $x = 5$ e $y = 2$.

b) $y = 5$ (e $x \in \mathbb{R}$).

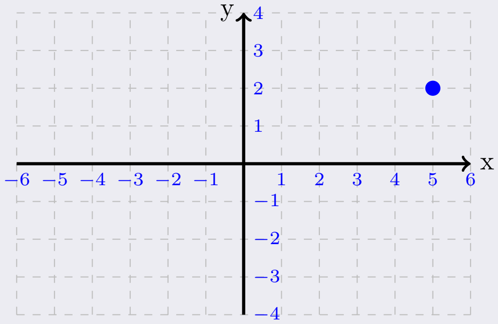
c) $x = 2$ (e $y \in \mathbb{R}$).

d) $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

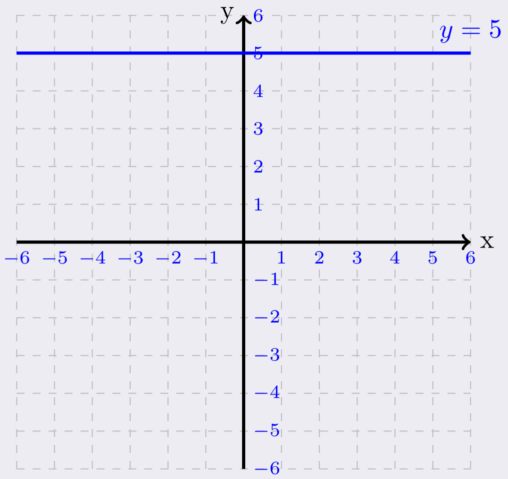
e) $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.

Solução:

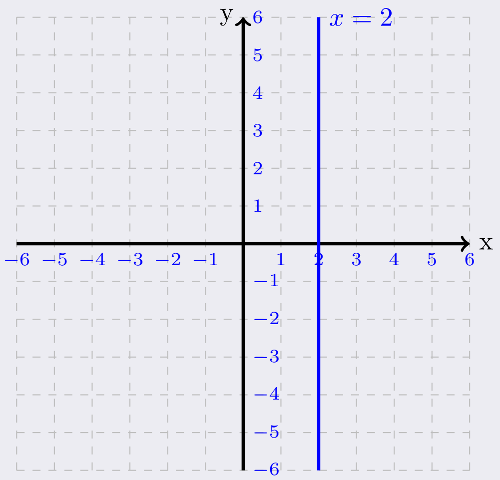
a) O ponto $P = (5, 2)$ está representado na imagem a seguir



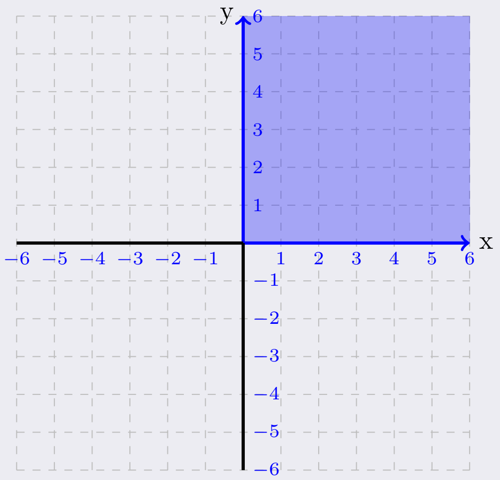
b) Os pontos $P = (x, 5)$ são todos os pontos que têm segunda coordenada com valor 5. Eles formam a reta $y = 5$ indicada na figura



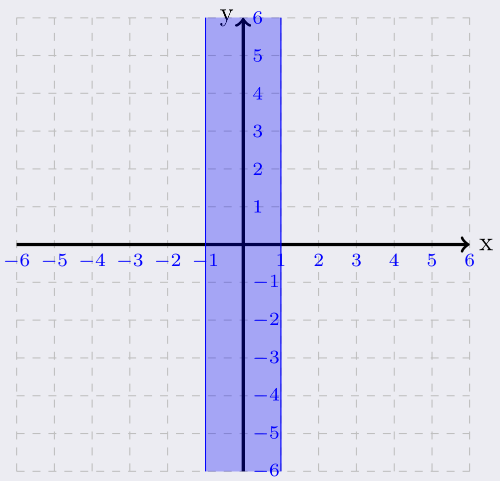
c) Os pontos $P = (2, y)$ são todos os pontos do plano que têm primeira coordenada igual a 2. Eles formam a reta $x = 2$ indicada na figura.

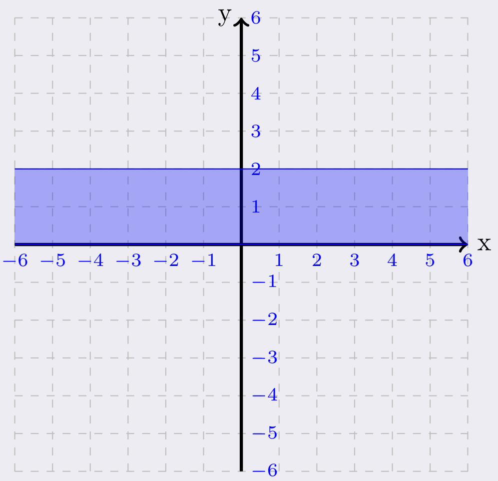


d) Os pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geq 0$ são aqueles que estão à direita do eixo OY. Os que têm $y \geq 0$ estão acima do eixo OX. Portanto, os pontos que cumprem as duas condições são os pontos do primeiro quadrante, incluindo as fronteiras desse quadrante, isto é, os semieixos positivos $(x, 0)$ e $(y, 0)$. Na figura fica

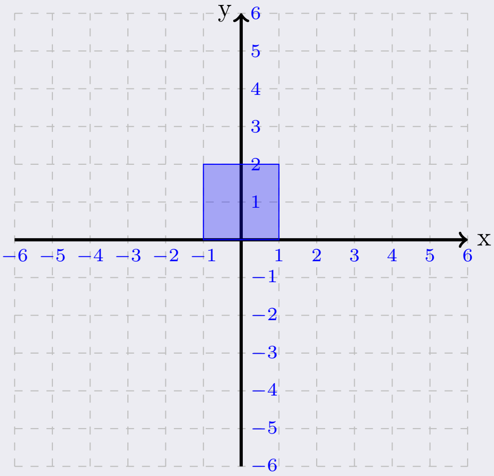


e) Os pontos $P = (x, y)$ do plano tais que $-1 \leq x \leq 1$, têm abscissa entre -1 e 1, incluindo -1 e 1, então compõem a faixa "vertical" indicada na imagem da esquerda. Do mesmo modo, os pontos $P = (x, y)$ tais que $0 \leq y \leq 2$ estão na faixa "horizontal" indicada na imagem da direita.

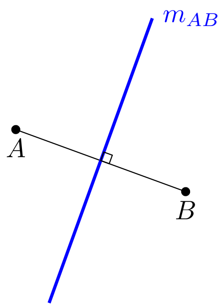




Assim, os pontos P que cumprem as duas condições são aqueles que formam o quadrado de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ e $(-1,2)$. A representação gráfica pode ser feita como a seguir.



Exercício 2.



Definição: Dado um segmento AB no plano, a mediatriz de AB é a reta m_{AB} que:

(i) é perpendicular ao segmento AB, e;

(ii) passa pelo ponto médio de AB.

Definição: Diz-se que o ponto A' é o simétrico de A com relação à reta r quando a reta r é a mediatriz do segmento AA'.

a) Determine o simétrico de $A = (3, 5)$ com relação ao eixo OX.

b) Determine o simétrico de $A = (3, 5)$ com relação ao eixo OY.

c) Determine o simétrico de $A = (a, b)$ com relação ao eixo OX.

d) Determine o simétrico de $A = (a, b)$ com relação ao eixo OY.

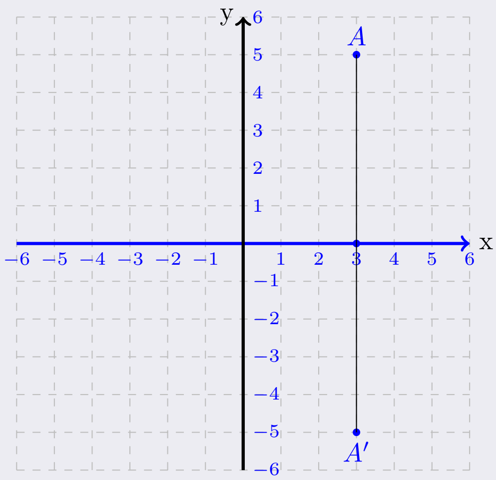
e) Determine o simétrico de $A = (2, 3)$ com relação à reta formada pelos pontos $(x, 1)$ (isto é, a reta $y = 1$).

Solução:

a) O ponto $A' = (a', b')$ que é o simétrico de A com relação ao eixo OX é tal que o eixo OX é mediatriz do segmento AA'. Como o eixo OX é "horizontal", o segmento AA' precisa ser "vertical", pois a mediatriz é perpendicular ao segmento AA'. Portanto, A e A' têm mesma abscissa (mesma coordenada x), isto é, $a' = 3$.

Como o eixo OX passa no ponto médio do segmento AA', a segunda coordenada de A' é o simétrico da segunda coordenada de A, isto é, $b' = -5$.

Portanto $A' = (3, -5)$.

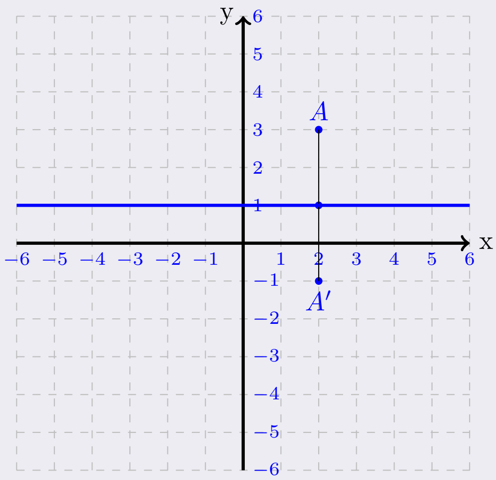


b) Resposta: $A' = (-3, 5)$.

c) Resposta: $A' = (a, -b)$.

d) Resposta: $A' = (-a, b)$.

e) Como a reta $y = 1$ é horizontal, o segmento AA' é vertical, logo as primeiras coordenadas de A e de A' coincidem. Isto é, $A' = (2, b')$. Falta determinar b'.



Lembre-se que o ponto M de interseção de AA' com a reta $y = 1$ é o ponto médio de AA' esse ponto tem coordenadas $M = (2, 1)$, logo a distância $AM = 2$. Assim, a distância $MA' = 2$, pois M é ponto médio de AA'. Portanto, $A' = (2, -1)$.

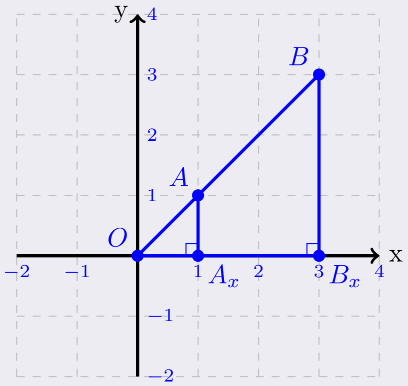
Exercício 3. Estudaremos agora os pontos $P = (x, x)$ do plano, isto é, os pontos $P = (x, y)$ tais que $y = x$.

a) Sejam dados os pontos $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$ e $B = (3, 3)$. Use triângulos para justificar que os ângulos que os segmentos OA e OB fazem com o eixo OX são iguais. Conclua que O, A e B são colineares (isto é, pertencem a uma mesma reta).

b) O ponto $P = (x, x)$ pertence a essa mesma reta, seja qual for o valor de $x \in \mathbb{R}$? Justifique.

Solução:

a) Sejam $A_x = (1, 0)$ e $B_x = (3, 0)$. Os triângulos OAA_x e OBB_x são isósceles e retângulos em A_x e B_x, respectivamente. Portanto, os ângulos $\widehat{AOA_x}$ e $\widehat{BOB_x}$ são ambos iguais a $45°$. Assim, o ponto A pertence ao segmento OB e os pontos O, A e B são colineares.



b) Seja $P_x = (x, 0)$. O triângulo OPP_x também é retângulo em P_x e isósceles, logo o ângulo $\widehat{POP_x} = 45°$. Portanto, P também pertence à reta OA.