Aula 32 – Inscrição e circunscrição de sólidos

Objetivos

- Identificar se determinados sólidos são ou não inscritíveis.
- Identificar se determinados sólidos são ou não circunscritíveis.

Introdução

Quando estudamos Geometria Plana, definimos polígonos inscritíveis e polígonos circunscritíveis. Analogamente, podemos considerar a inscrição e a circunscrição de alguns sólidos.

Definição 1

Um poliedro está inscrito em uma esfera se todos os seus vértices pertencem à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *inscritível*. Um poliedro está circunscrito a uma esfera se todas as faces do poliedro são tangentes à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *circunscritível*.

Quando um poliedro está inscrito em uma esfera, diz-se também que a esfera está circunscrita ao poliedro. Quando um poliedro está circunscrito a uma esfera, diz-se também que a esfera está inscrita no poliedro.

Como exemplo de poliedro inscritível podemos citar os paralelepípedos retangulares. Para ver que todo paralelepípedo retangular é inscritível, lembre que as diagonais de um paralelepípedo qualquer são concorrentes em um ponto e que esse ponto as divide ao meio. Além disso, as diagonais de um paralelepípedo retangular têm o mesmo comprimento. Logo, o ponto de encontro entre elas é equidistante dos vértices e a distância entre esse ponto e cada um dos vértices é a metade da medida de suas diagonais.

Como $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ é a medida das diagonais de um paralelepípedo retangular de medidas a, b e c, provamos que:

Proposição 1

Todo paralelepípedo retangular é inscritível. Se o paralelpípedo retangular tem medidas a, b e c então o raio da esfera circunscrita é $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. Segue da proposição 8 que o raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta a é $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Uma pergunta natural que surge é: todo paralelepípedo é inscritível? A proposição a seguir diz que não.

Proposição 2

Todo paralelepípedo inscritível é retangular.

Demonstração.

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo inscrito em uma esfera S. Sejam α o plano da face $ABCD$ e $\mathcal{C}$ o círculo obtido pela interseção entre α e S. Como A, B, C e D pertencem a $\mathcal{C} = \alpha \cap S$, o paralelogramo $ABCD$ está inscrito em $\mathcal{C}$. Mas pode-se provar facilmente (veja exercício 1 desta aula) que todo paralelogramo inscritível é um retângulo. Logo, a face $ABCD$ é um retângulo. Um raciocínio análogo prova que as outras faces são também retângulos. Assim, todas as faces de $ABCDEFGH$ são retângulos e, portanto, $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo retangular.

Q.E.D.

Consideraremos, agora, a circunscrição de paralelepípedos. É um fato verdadeiro, e muito fácil de provar (veja exercício 2 desta aula), que todo paralelogramo circunscritível é um losango. É de se esperar que valha um resultado análogo para paralelepípedos, ou seja, que todo paralelepípedo circunscritível seja um *romboedro* (paralelepípedo que possui todas as arestas congruentes). Mas isso não é verdade. O paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível e não é um romboedro.

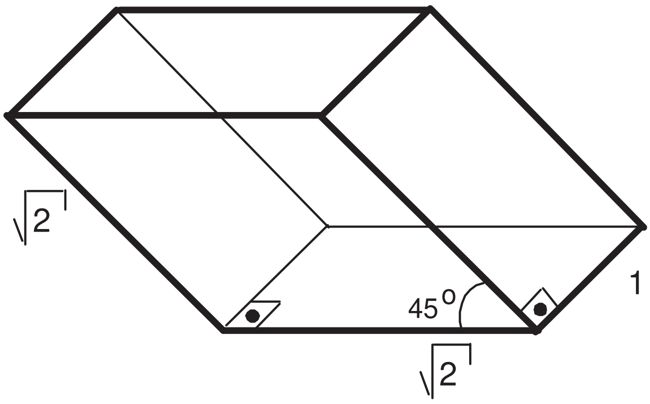

Figura 32.1: Paralelepípedo circunscritível que não é um romboedro.

Deixaremos como exercício (veja exercício 3 desta aula) a prova de que o paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível.

Para paralelepípedos circunscritíveis, vale o seguinte resultado:

Proposição 3

As faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

A prova desta proposição será deixada como exercício (veja exercício 4 desta aula).

Segue da proposição anterior que um paralelepípedo retangular circunscritível é um cubo.

Provaremos agora que todo cubo é inscritível.

Considere um cubo $ABCDFGHI$ de aresta a. Já sabemos que ele é circunscritível e que o raio da esfera circunscrita é $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Seja O o centro dessa esfera e trace os segmentos OA, OB, OC, OD, AC e BD. Seja E o ponto de encontro entre os segmentos AC e BD e trace o segmento OE (veja a **Figura 32.2**).

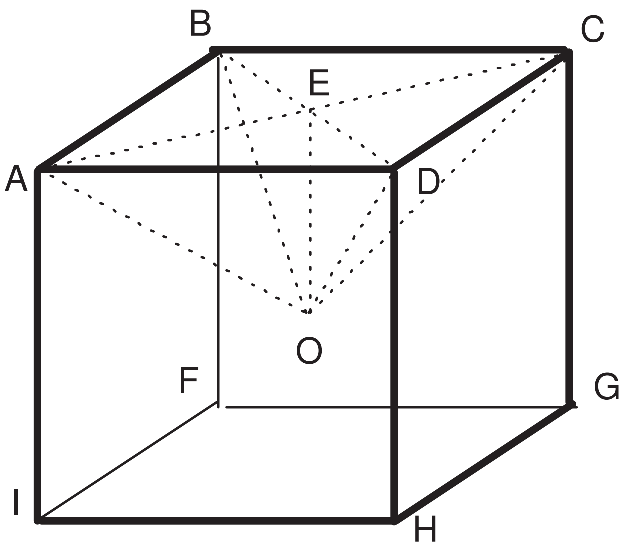

Figura 32.2: E é o ponto de encontro das diagonais da face.

Como $OA \equiv OC$ e E é o ponto médio de AC, segue que OE é perpendicular a AC. Da mesma forma, como $OB \equiv OD$ e E é o ponto médio de BD, tem-se que OE também é perpendicular a BD. Assim, OE é perpendicular a duas retas concorrentes do plano que contém $ABCD$ e, portanto, OE é perpendicular à face

$ABCD$. Como OBE é retângulo em E, $m(OB) = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $m(BE) = a\sqrt{2}/2$, segue do Teorema de Pitágoras que $m(OE) = a/2$.

Está provado que a distância de O ao plano da face $ABCD$ é $a/2$. Da mesma forma, prova-se que a distância de O aos planos das outras faces é também $a/2$. Logo, a esfera de centro O e raio $a/2$ é tangente a todas as faces do cubo. Está, então, provado que:

Proposição 4

Todo cubo é circunscritível. Se a aresta do cubo é a, o raio da esfera inscrita é $\dfrac{a}{2}$. Além disso, a esfera inscrita tangencia o cubo no centro de cada face.

Inscrição e circunscrição de tetraedros

Consideraremos, agora, a inscrição de tetraedros. A proposição a seguir será fundamental para esse fim.

Proposição 5

Por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera

Demonstração.

Sejam A, B , C e D pontos que não estão em um mesmo plano e seja α o plano que contém B, C e D. Sabemos que existe um ponto E que equidista dos pontos B, C e D. O ponto E é precisamente o circuncentro do triângulo BCD. Seja r a reta perpendicular a α e passando por E (veja **Figura 32.3**).

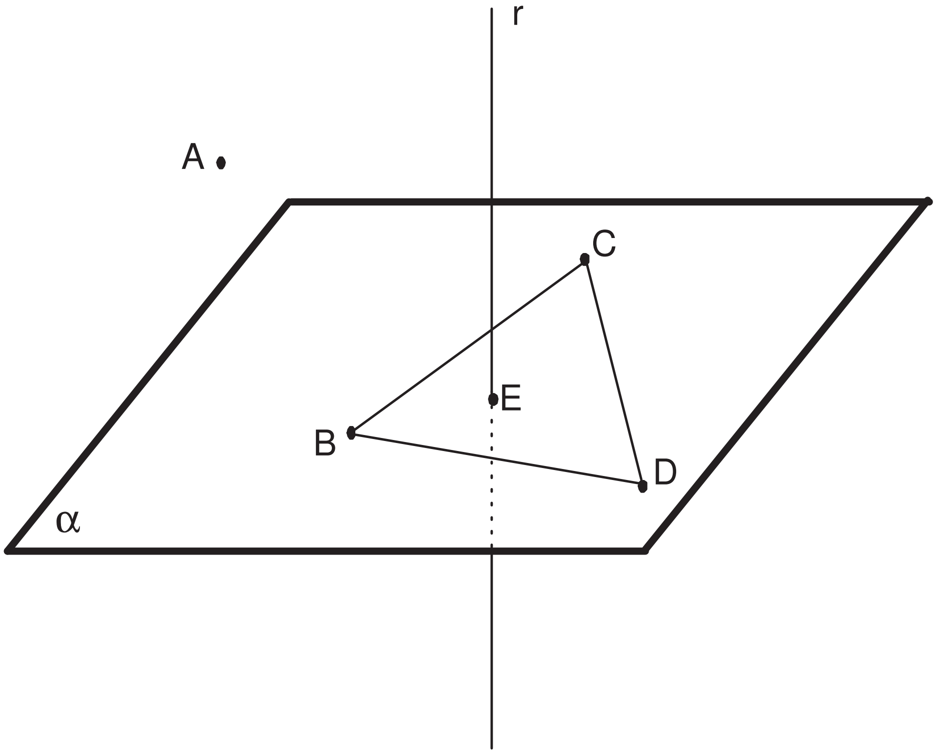

Figura 32.3: Prova da proposição 5.

Seja P um ponto de r. Usando o caso de congruência L.A.L. nos triângulos PBE, PEC e PED, podemos provar que $PB \equiv PC \equiv PD$, ou seja, todo ponto de r equidista de B, C e D.

Seja β o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e que passa pelo ponto médio de AB. Podemos provar (veja o exercício 5 desta aula) que β equidista de A e B, ou seja, todo ponto de β equidista de A e B. Afirmamos que β intersecta

r. Provaremos essa afirmação por contradição. Suponha que β e r sejam paralelos. Como $r \perp \alpha$, tem-se $\beta \perp \alpha$ (justifique!). Como $\overleftrightarrow{AB} \perp \beta$ e $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida em α, segue que $\overleftrightarrow{AB}$ e α são paralelos, o que é um absurdo, pois $B \in \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha$. Portanto, β intersecta r em um um ponto Q (veja **Figura 32.4**).

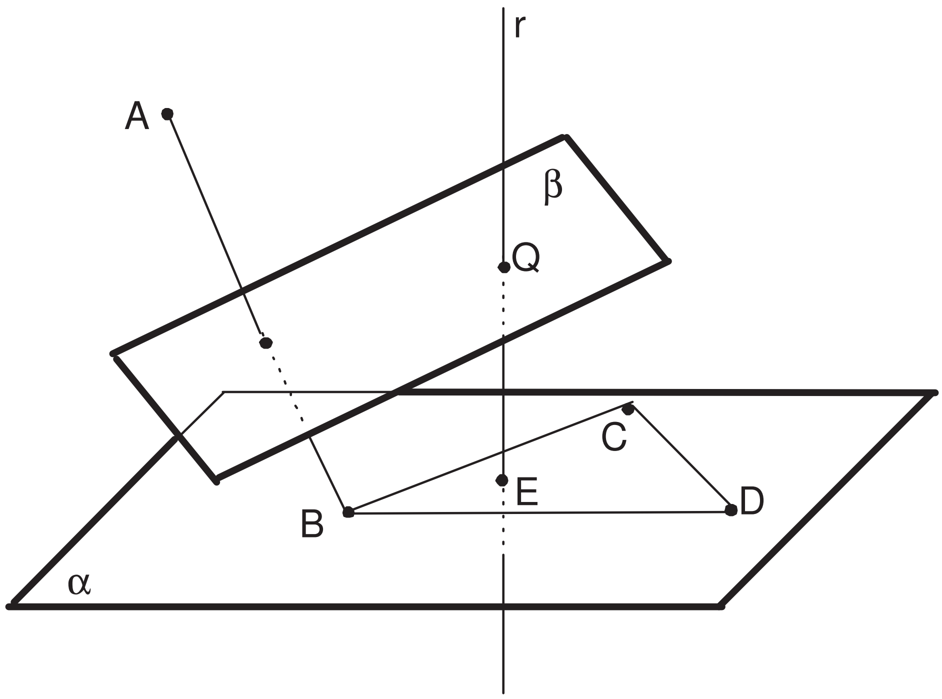

Figura 32.4: Prova da proposição 5.

Temos que $m(QB) = m(QC) = m(QD)$, pois $Q \in r$, e $m(QA) = m(QB)$, pois $Q \in \beta$. Logo, Q equidista de A, B, C e D, o que prova que a esfera centrada em Q e de raio $m(QA)$ passa por A, B, C e D. Deixaremos como exercício (veja exercício 6 desta aula) a prova de que não existe outra esfera que passa por A, B, C e D.

Q.E.D.

Como conseqüência imediata da proposição 5 temos o seguinte corolário:

Corolário: Todo tetraedro é inscritível.

Provaremos agora que todo tetraedro regular é circunscritível.

Seja $ABCD$ um tetraedro regular e seja O o centro da esfera circunscrita. Sejam M o ponto médio de BC, E o circuncentro de BCD e trace AM, MD e AE (veja **Figura 32.5**).

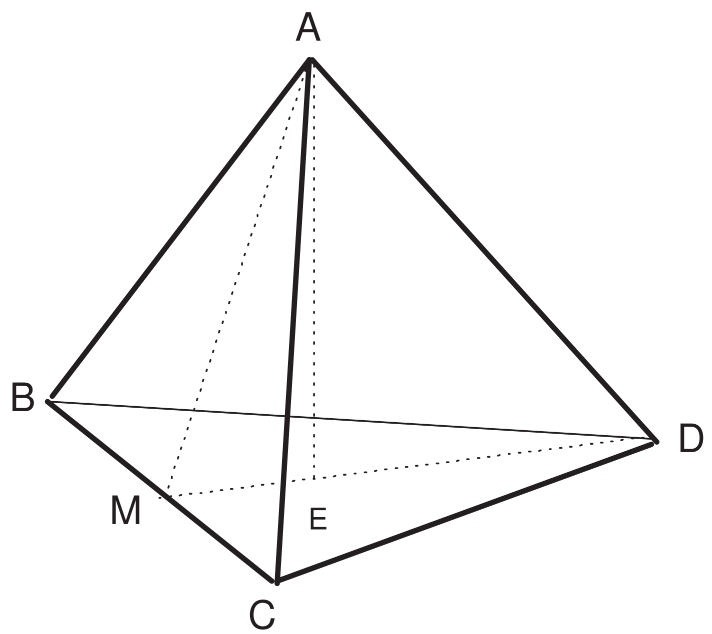

Figura 32.5: Prova de que todo tetraedro regular é circunscritível.

Note que $E \in MD$, pois o triângulo BCD é equilátero. Como ABC e DBC são equiláteros e M é o ponto médio de BC, temos $AM \perp BC$ e $DM \perp BC$. Logo, BC é perpendicular ao plano que contém os pontos A, M e D. Segue que BC é perpendicular a AE. Da mesma forma, prova-se que AE e DC são perpendiculares. Logo, AE é perpendicular a duas retas concorrentes ($\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$) do plano que contém B, C e D. Segue que AE é perpendicular ao plano da face BCD. Conseqüentemente, o centro O da esfera circunscrita pertence à reta $\overleftrightarrow{AE}$. De fato, $O \in AE$ (prove isso!). Da mesma forma, prova-se que as retas que ligam O ao circuncentro (nesse caso coincide com o baricentro) das outras faces de $ABCD$ são perpendicular às respectivas faces. Seja F o circuncentro de ABC e trace OF e OM (veja **Figura 32.6**).

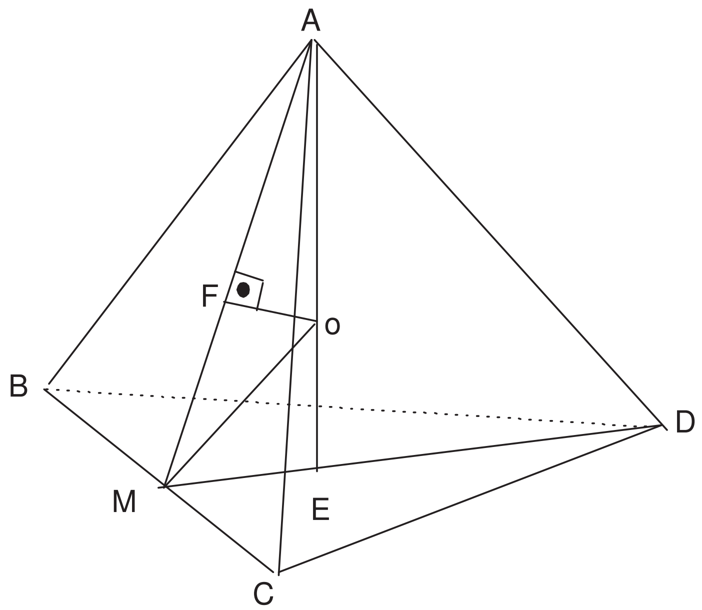

Figura 32.6: F é o baricentro de ABC.

Note que os triângulos OEM e OFM são retângulos em E e F, respectivamente. Além disso,

$$m(FM) = \frac{1}{3}m(AM) = \frac{1}{3}m(DM) = m(EM).$$

Os triângulos OEM e OFM são então congruentes, de onde se conclui que $OE \equiv OF$, ou seja, a distância de O ao plano da face BCD é igual à distância de O ao plano da face ABC. Da mesma forma, prova-se que a distância de O ao plano das outras faces é igual a $m(OE)$. Isso prova que a esfera de centro O e raio OE é tangente a todas as faces de $ABCD$. Logo, o tetraedro $ABCD$ é circunscritível e o centro O da esfera circunscrita é também o centro da esfera inscrita. Observe que $m(OE)$ é o raio da esfera inscrita e $m(AO)$ é o raio da esfera circunscrita. Calcularemos, agora, $m(OE)$ e $m(AO)$. Se a aresta do tetraedro mede a, sabemos que:

$$m(AM) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ ,$$

$$m(FM) = m(EM) = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ e}$$

$$m(AF) = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \ .$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$m(AE)^2 = m(AM)^2 - m(EM)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Assim,

$$m(AE) = \frac{a\sqrt{6}}{3} \ .$$

Como os triângulos AFO e AEM são semelhantes, tem-se

$$\frac{m(OF)}{m(EM)} = \frac{m(AO)}{m(AM)} = \frac{m(AF)}{m(AE)}.$$

Substituindo os valores de $m(EM)$, $m(AM)$, $m(AF)$ e $m(AE)$, obtemos que $m(OF) = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ e $m(AO) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Sintetizando o que fizemos anteriormente, temos o seguinte resultado.

Proposição 6

Todo tetraedro regular é inscritível e circunscritível e as esferas inscrita e circunscrita têm o mesmo centro. Se a aresta do tetraedro vale a, então os raios r e R das esferas, respectivamente, inscrita e circunscrita, valem $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ e $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Além disso, a esfera inscrita tantencia as faces em seus baricentros.

Sabemos que todo tetraedro é inscritível. Se o tetraedro for regular, sabemos que ele também é circunscritível e que os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Resta a seguinte pergunta: todo tetraedro é circunscritível? A resposta é sim, e a prova desse fato será deixada como exercício desta aula (veja o exercício 20 desta aula).

Inscrição e circunscrição de um octaedro regular

Encerraremos esta aula com o estudo da inscrição e da circunscrição de um octaedro regular.

Seja $ABCDEF$ um octaedro regular de aresta medindo a, e seja O o ponto de encontro das diagonais BD e CE. Trace AO (veja **Figura 32.7**).

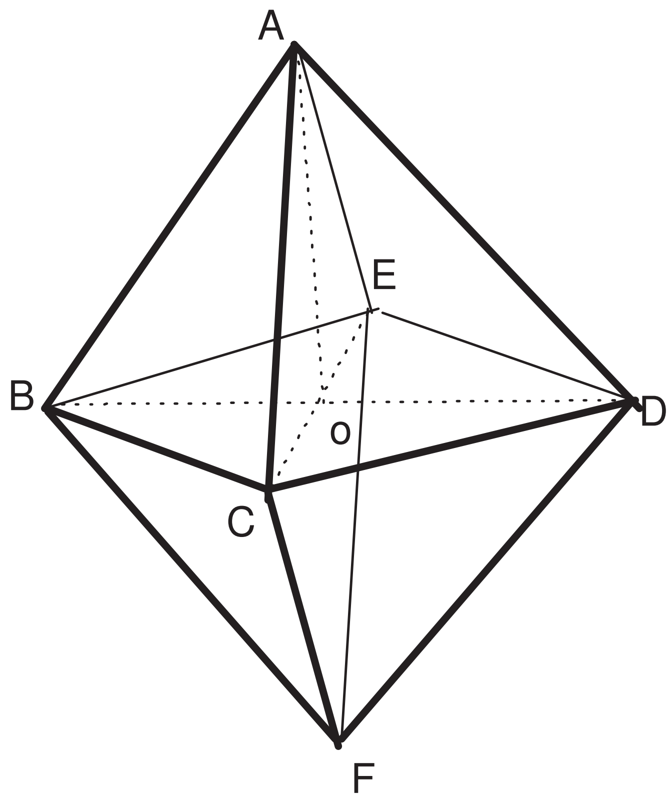

Figura 32.7: Octaedro regular.

Como $AB \equiv AD \equiv AC \equiv AE$ (pois todas as arestas têm o mesmo comprimento) e O é o ponto médio de BD e de CE, tem-se que $AO \perp BD$ e $AO \perp CE$. Segue que AO é perpendicular ao plano de $BCDE$. Além disso, os triângulos AOD, AOE, AOB e AOC, retângulos em O, são congruentes (por quê?). Em particular, $OE \equiv OB \equiv OC \equiv OD$. Seja M o ponto médio de BC e trace AM e OM. Seja OG a altura do triângulo AOM relativa ao lado AM (veja **Figura 32.8**).

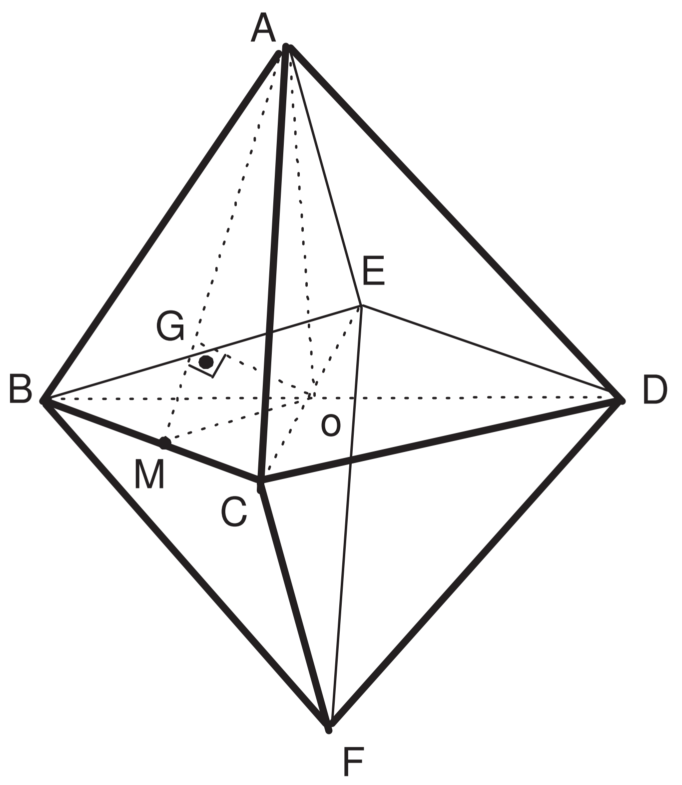

Figura 32.8: BC é perpendicular ao plano que contém AMO.

Como $AB \equiv AC$ e $OB \equiv OC$, tem-se que $AM \perp BC$ e $OM \perp BC$, de onde se conclui que BC é perpendicular ao plano que contém AMO. Segue que OG é perpendicular a BC. Como $OG \perp AM$, conclui-se que OG é perpendicular à face ABC. Determinemos, agora, $m(AO)$ e $m(OG)$. Como $m(AD) = a$, $m(OD) = \frac{1}{2}m(BD) = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ e AOD é retângulo em O, segue do teorema de

Pitágoras que

$$m(AO)^2 = m(AD)^2 - m(OD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ou seja, $m(AO) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Da mesma forma, prova-se que $m(FO) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Como a distância de O a cada um dos pontos B, C, D e E é também $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, segute que a esfera de centro O e raio $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ passa por todos os vértices do octaedro. Para determinar $m(OG)$, usaremos a semelhança entre os triângulos AOM e AGO. Dessa semelhança, temos

$$\frac{m(OM)}{m(OG)} = \frac{m(AM)}{m(AO)} = \frac{m(AO)}{m(AG)}$$

Como $m(OM) = \dfrac{a}{2}$, $m(AM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $m(AO) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, obtemos que $m(OG) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ e que $m(AG) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{3}m(AM)$.

Como OG é perpendicular à face ABC, segue que a distância de O à face ABC é $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Além disso, como $m(AG) = \dfrac{2}{3}m(AM)$, tem-se que G é o baricentro do triângulo ABC. Da mesma forma, prova-se que a distância de O às demais faces é $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Assim, a esfera de centro O e raio $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ é tangente a todas as faces do octaedro e os pontos de tangência são precisamente os baricentros das faces. Está provado, então, que:

Proposição 7

Um octaedro regular é inscritível e circunscritível e os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Se a aresta do octaedro mede a, então os raios das esferas inscrita e circunscrita medem, respectivamente, $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ e $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Além disso, a esfera inscrita tangencia o octaedro nos baricentros das faces.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Que todo paralelepípedo retangular é inscritível.
- Que todo paralelepípedo inscritível é retangular.
- Que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.
- Que por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera.
- Que todo tetraedro é inscritível e circunscritível.
- Que todo octaedro regular é inscritível e circunscritível.

Exercícios

1. Prove que todo paralelogramo inscritível é retângulo.

2. Prove que todo paralelogramo circunscritível é losango.

3. Prove que o paralelepípedo da **Figura 32.1**, do texto, é circunscritível.

4. Prove que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

   Sugestão: Prove que a altura do paralelepípedo em relação a qualquer face é a mesma e use a fórmula para o volume de um paralelepípedo.

5. Sejam AB um segmento e β o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto médio de AB. Prove que, para todo $P \in \beta$ tem-se $m(P, A) = m(P, B)$.

6. Prove que a esfera que passa por quatro pontos não coplanares é única.

7. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a. Prove que o octaedro determinado pelos pontos médios das arestas do tetraedro é regular e determine a medida de suas arestas (veja **Figura 32.9**).

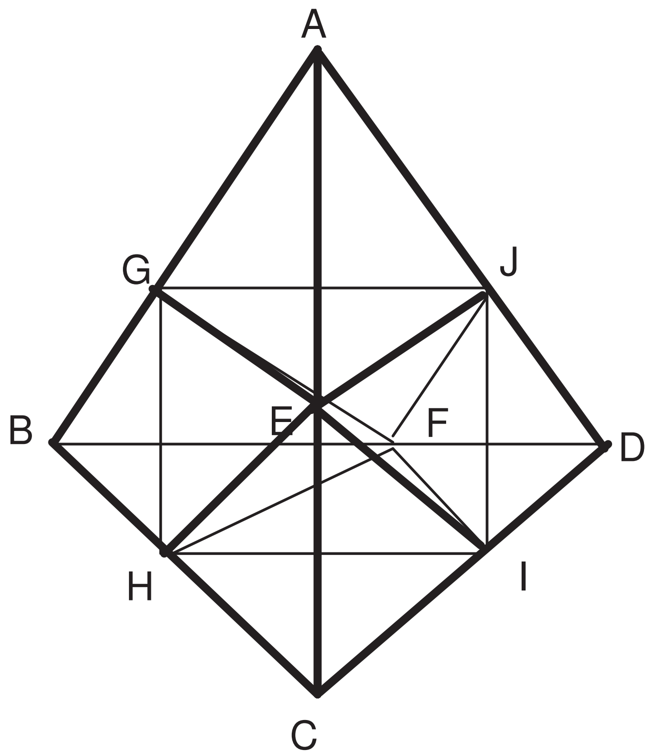

Figura 32.9: Exercício 7.

8. Seja $ABCDEFGH$ um cubo de aresta medindo a. Prove que é regular o tetraedro determinado pelos centros das faces do cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura 32.10**).

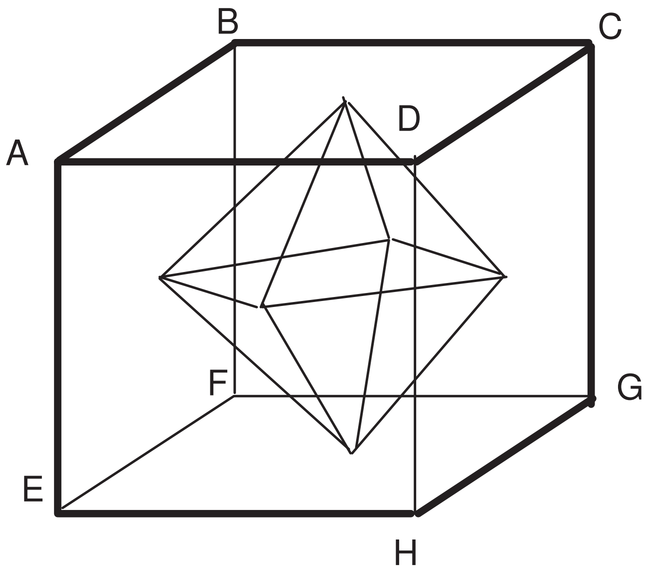

Figura 32.10: Exercício 8.

9. Seja $ABCDEF$ um octaedro regular de aresta medindo a. Prove que o poliedro determinado pelos centros das faces do octaedro é um cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura** 9).

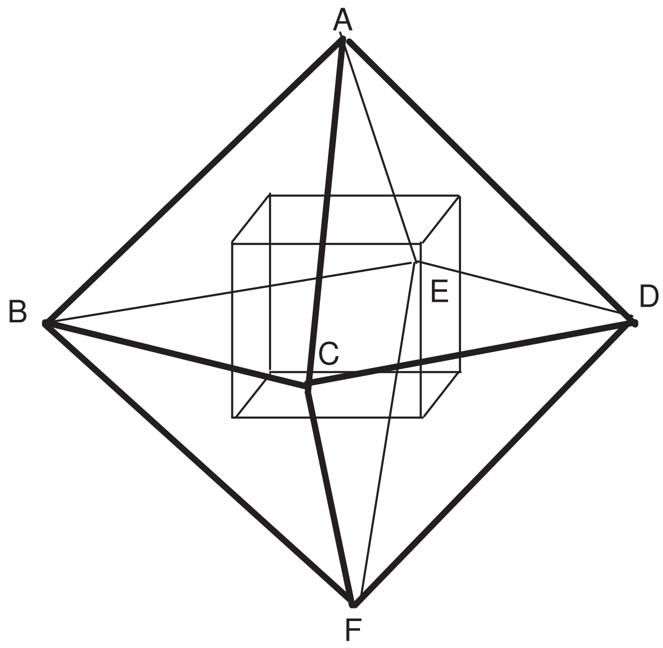

Figura 32.11: Exercício 9.

10. Dizemos que um cilindro está inscrito em uma esfera se os círculos das bases estão contidos na esfera (veja **Figura 32.12**).

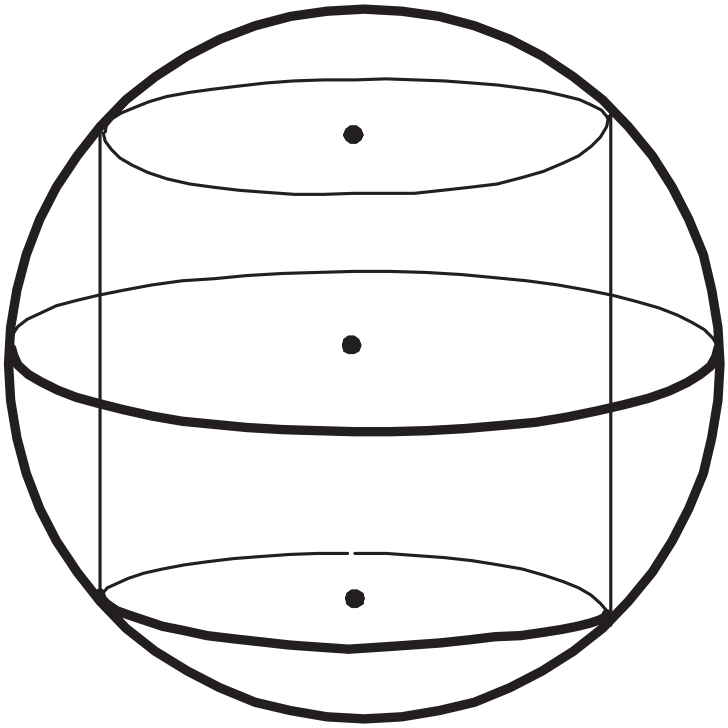

Figura 32.12: Exercício 10.

Prove que se um cilindro está inscrito em uma esfera, então ele é reto.

11. Determine o raio de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio R.

12. Dizemos que um cilindro está circunscrito a uma esfera se os planos das suas bases são tangentes à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja a **Figura 32.13**).

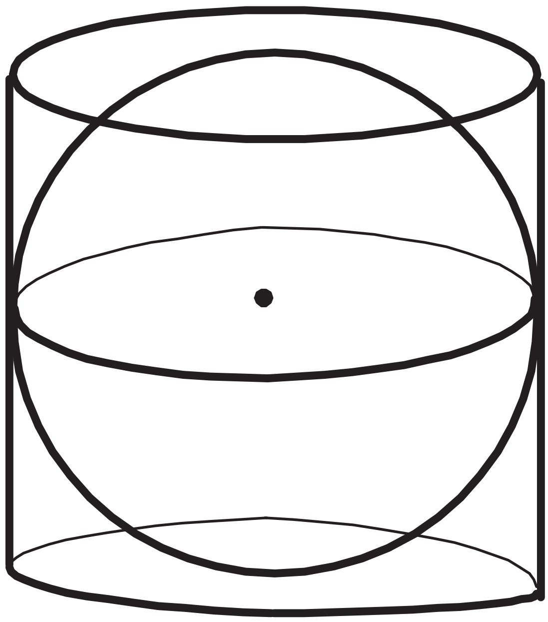

Figura 32.13: Exercício 12.

Se um cilindro está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

13. Um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R. Prove que esse cilindro é equilátero e determine seu raio.

14. Dizemos que um cone está inscrito em uma esfera se o seu vértice pertence à esfera e o círculo da base está contido na esfera (veja **Figura 32.14**).

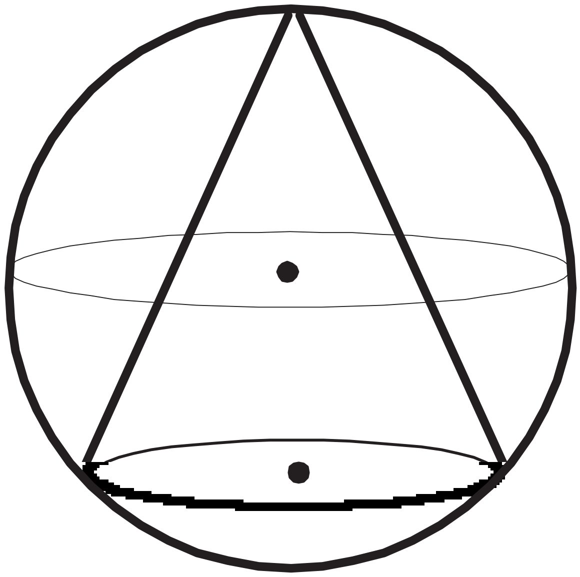

Figura 32.14: Exercício 14.

Determine a altura de um cone reto de raio da base r inscrito em uma esfera de raio R.

15. Dizemos que um cone está circunscrito a uma esfera se sua base é tangente à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja **Figura 32.15**).

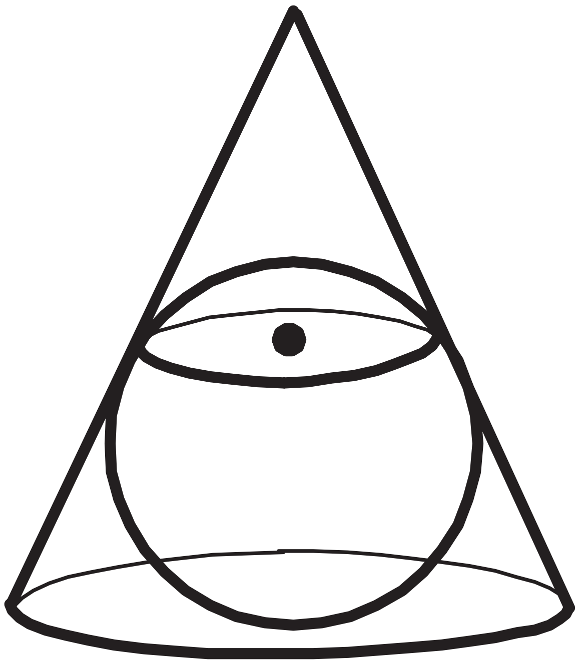

Figura 32.15: Exercício 15.

Se um cone está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

16. Um cone reto de altura h e raio r está circunscrito a uma esfera. Determine o raio dessa esfera.

17. Determine o volume do cone equilátero circunscrito a uma esfera de raio R.

18. Um cilindro e um cone reto estão inscritos em uma esfera de raio $5\,cm$, de modo que a base do cone coincide com a base inferior do cilindro. Se o cone e o cilindro têm o mesmo volume, determine a área lateral do cone.

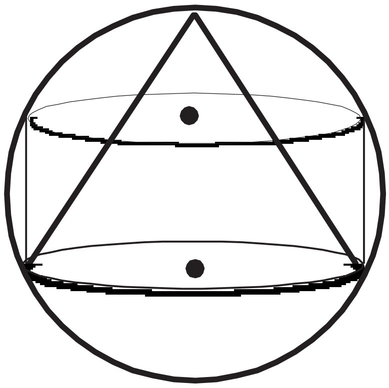

Figura 32.16: Exercício 18.

19. Considere dois planos α e β que se intersectam segundo uma reta r, e seja γ um plano perpendicular a r em um ponto A. Sejam $s = \alpha \cap \gamma$ e $t = \beta \cap \gamma$. Sejam u_1 e u_2 as retas que contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por s e t (veja a **Figura 32.17**).

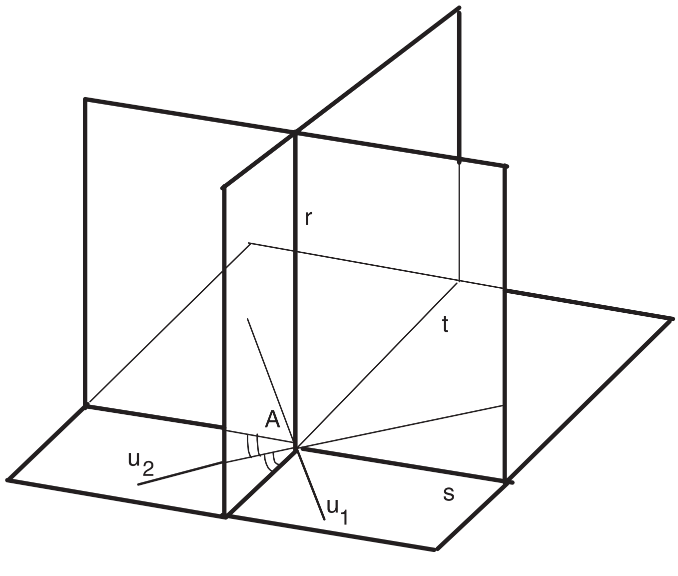

Figura 32.17: Exercício 19.

Sejam π_1 o plano determinado por r e u_1 e π_2 o plano determinado por r e u_2. Prove que $\pi_1 \cup \pi_2$ é o conjunto dos pontos que equidistam de α e β. Chamaremos π_1 e π_2 de planos bissectores de α e β.

20. Prove que todo tetraedro é circunscritível.

    Sugestão: Seja $ABCD$ um tetraedro e considere o plano bissector dos planos das faces ABC e ABD que contém pontos da face BCD. Esse plano intersecta CD em um ponto E (veja **Figura 32.18**).

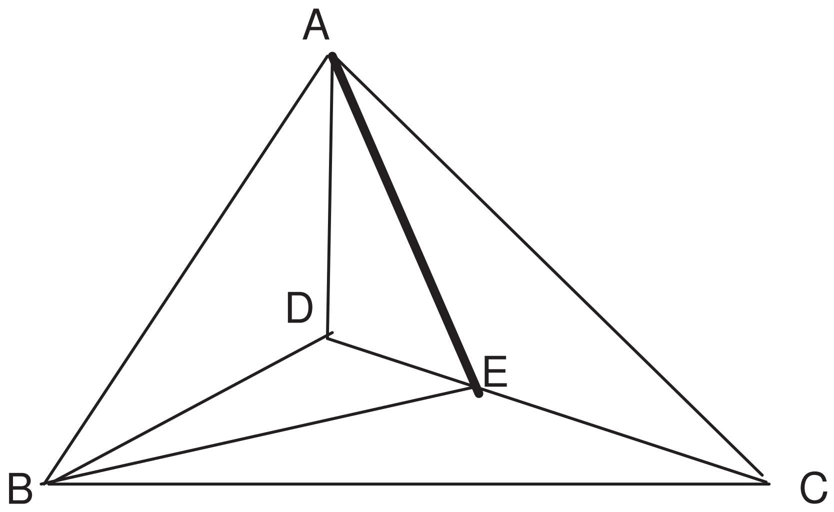

Figura 32.18: Exercício 20.

Considere agora o plano bissector dos planos das faces ABC e ADC que contém pontos de BCD. Esse plano intersecta BE em um ponto F (veja **Figura 32.19**).

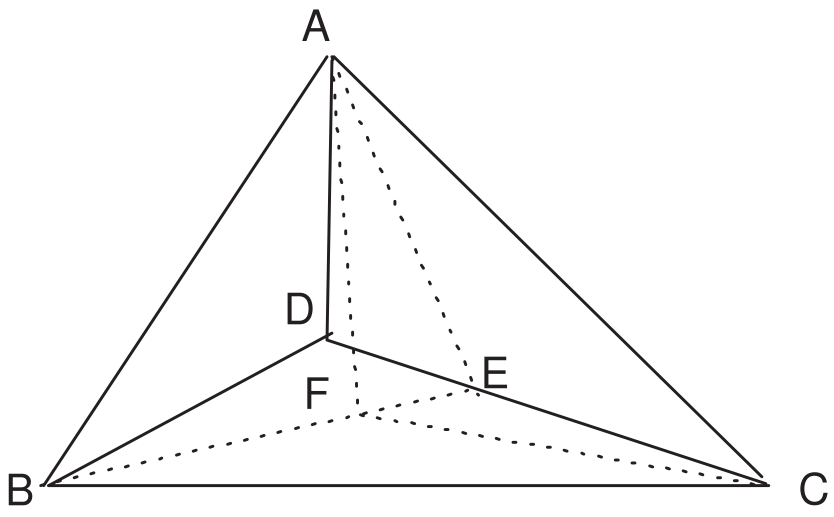

Figura 32.19: Exercício 20.

Finalmente, considere o plano bissector dos planos das faces ADC e BDC que contém pontos de ABD. Esse plano intersecta AF em um ponto G (veja **Figura 32.20**).

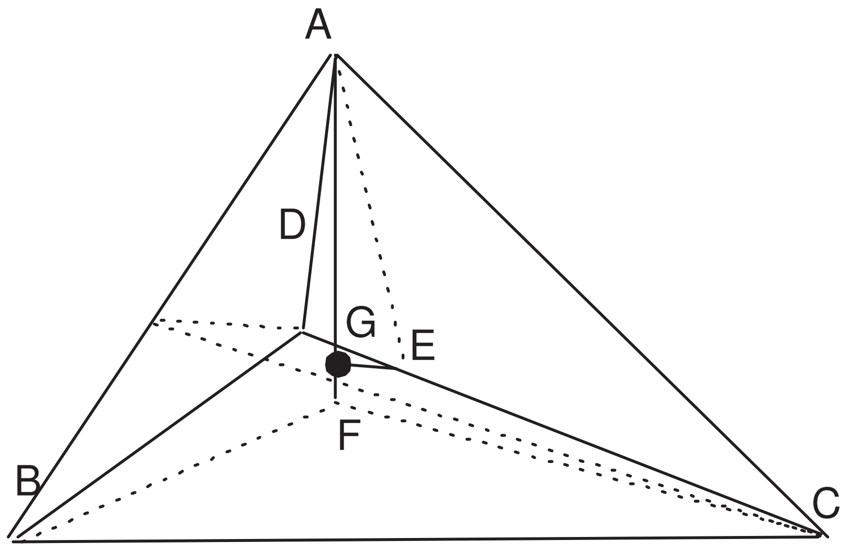

Figura 32.20: Exercício 20.

Use o exercício 19 para provar que G equidista das quatro faces do tetraedro.