Aula 21 – Ângulos no espaço - parte II

Objetivos

- Identificar ângulos entre planos e entre retas e planos.
- Determinar distâncias no espaço.

Introdução

Nesta aula, dando continuidade ao nosso estudo de ângulos, veremos como se definem o ângulo entre dois planos e o ângulo entre uma reta e um plano no espaço. Veremos também como calcular a distância entre um ponto e uma reta, e entre um ponto e um plano.

Ângulo entre planos e perpendicularismo entre planos

Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome um ponto $A \in r$ e chame de γ o plano que passa por A e é perpendicular a r. Esse plano intersecta α e β segundo as retas s e t, respectivamente, como na **Figura** 21.1.

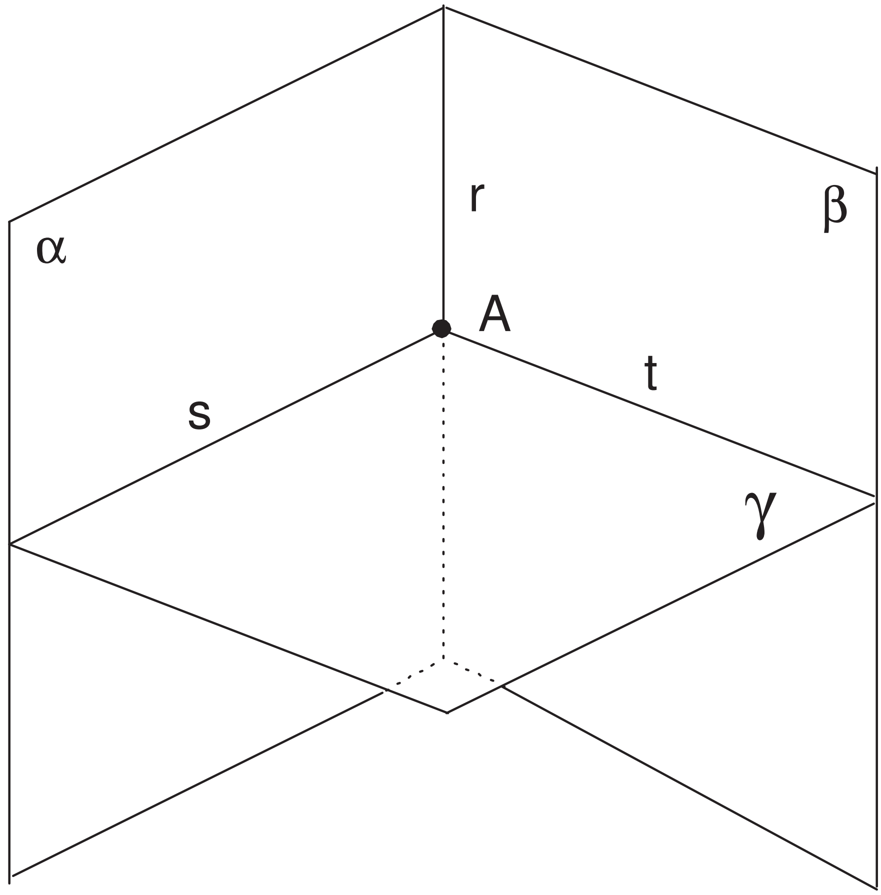

Figura 21.1: Definição de ângulo entre planos.

O ângulo entre os planos α e β é definido como o ângulo entre as retas s e t. Prova-se (veja exercício 16) que o valor do ângulo não depende do ponto A escolhido, como está ilustrado na **Figura** 21.2.

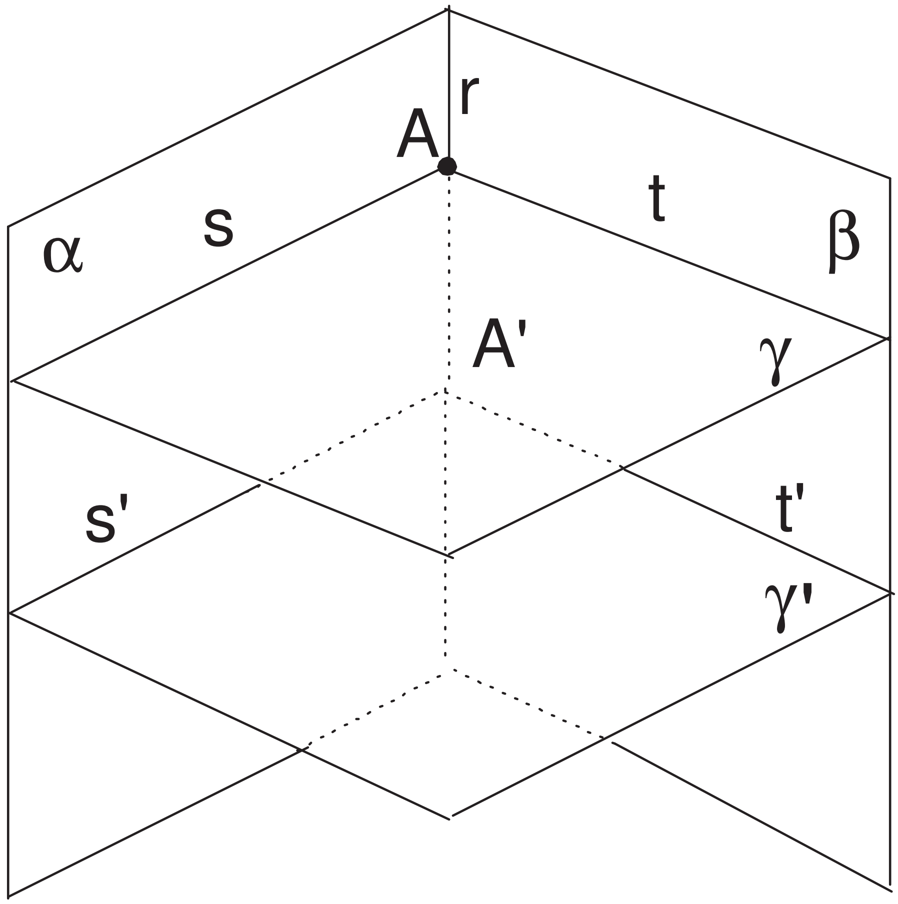

Figura 21.2: O ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t'.

Dois planos são ditos perpendiculares se o ângulo entre eles for de 90^o. A seguinte proposição fornece um ótimo critério para concluir que dois planos são perpendiculares.

Proposição 1

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então esses planos são perpendiculares.

Demonstração.

Seja r uma reta perpendicular a um plano α e suponha que o plano β contenha r. Queremos mostrar que α é perpendicular a β. Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$, e considere um ponto $A \in s$ que não pertença a r. Seja γ o plano que passa por A e é perpendicular a s. Esse plano corta α e β segundo retas u e t, respectivamente (**Figura** 21.3). Por definição de perpendicularismo entre planos, para provar que $\beta \perp \alpha$, temos que mostrar que $u \perp t$.

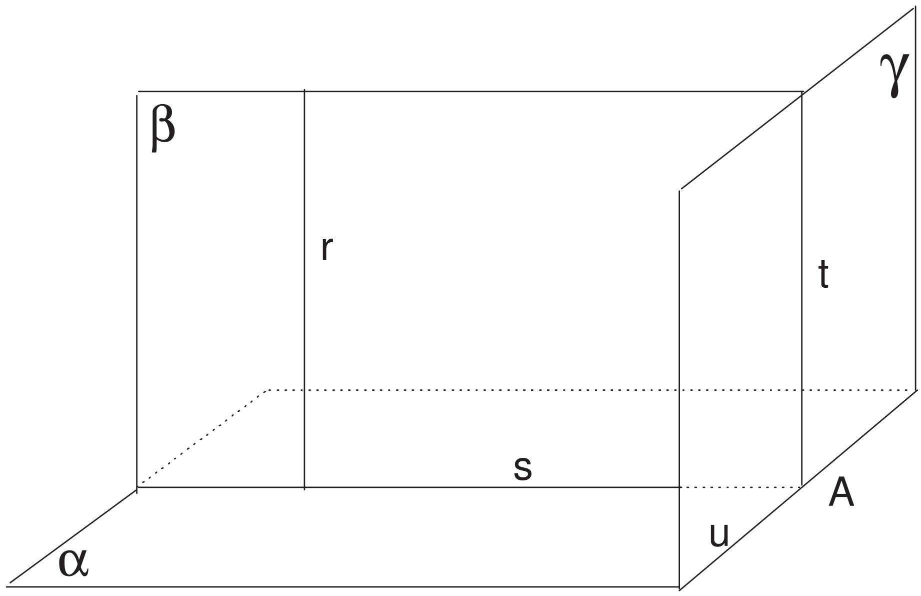

Figura 21.3: Prova de que $\alpha \perp \beta$.

Em primeiro lugar, $r \perp s$, pois r é perpendicular a α e $s \subset \alpha$. Como s é perpendicular a γ por construção do plano γ, segue do exercício 2 da aula 21 que r é paralela a γ. Isso implica que r e t não se intersectam. Como r e t são coplanares (ambas pertencem a β), conclui-se que r e

t são paralelas. Como $r \perp \alpha$, segue que t é perpendicular a α. Assim, t é perpendicular a qualquer reta contida em α. Mas u está em α, pois $u = \gamma \cap \alpha$. Logo, t é perpendicular a u.

Q.E.D.

A proposição seguinte também relaciona perpendicularismo entre reta e plano com perpendicularismo entre planos.

Proposição 2

Se uma reta r e um plano β são perpendiculares a um plano α, então r está contida em β ou r é paralela a β.

Demonstração.

Suponha que r não esteja contida em β. Provaremos que r é paralela a β. Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$ e considere um plano γ perpendicular a s. O plano γ corta α e β segundo retas que chamaremos u e t, como na **Figura 21.4**.

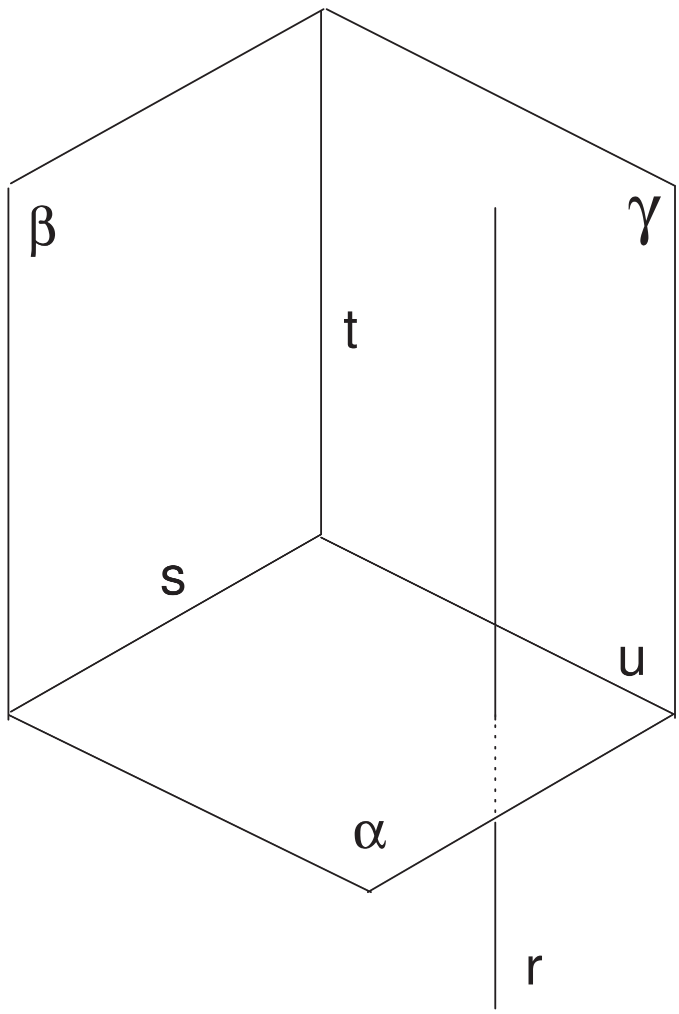

Figura 21.4: Prova da proposição 24.

Como $\gamma \perp s$ por construção, tem-se $s \perp t$ e $s \perp u$. Além disso, por definição de perpendicularismo entre planos, tem-se que $t \perp u$. Logo, t é perpendicular às retas concorrentes s e u contidas em α. Concluímos então que $t \perp \alpha$. Mas r é perpendicular a α por hipótese, e $r \neq t$, porque t está contida em β e r não está. Segue então, da proposição 19, que r é paralela a t. Como $t \subset \beta$, conclui-se que r é paralela a β. Q.E.D.

A seguinte proposição decorre diretamente das anteriores e será deixada como exercício ao fim desta aula.

Proposição 3

Se dois planos secantes são perpendiculares a um plano, então a reta de interseção entre eles é perpendicular a esse plano.

Ângulo entre uma reta e um plano

Considere uma reta r oblíqua a um plano α, intersectando-o no ponto A. Observe que as retas que estão em α e passam por A fazem com r ângulos que podem ser bem diferentes. Veja a **Figura** 21.5. Por esse motivo, a definição de ângulo entre reta e plano merece um certo cuidado.

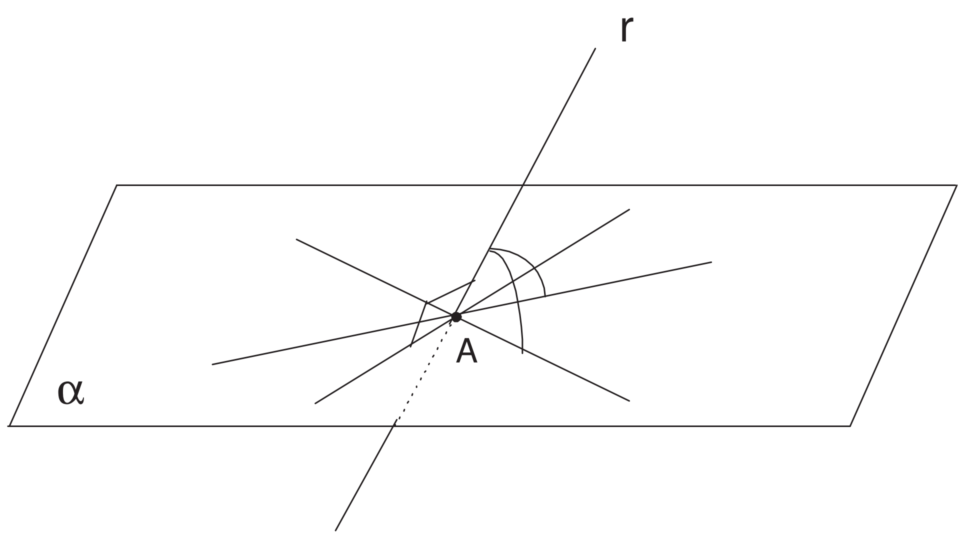

Figura 21.5: O ângulo entre r e as retas de α varia.

Se r for perpendicular a α, existem infinitos planos perpendiculares a α contendo r (como você verá no exercício 3 desta aula). A situação é diferente no caso em que r é oblíqua a α: existe um único plano contendo r e perpendicular a α. Vamos mostrar essa afirmação.

Para isso, seja $A = r \cap \alpha$ e tome um ponto $P \neq A$ em r. Chame de Q o pé da perpendicular baixada de P ao plano α. Temos que $Q \neq A$, pois estamos assumindo que r é oblíqua a α. Seja β o plano que passa pelos pontos P, Q e A (veja a **Figura** 21.6).

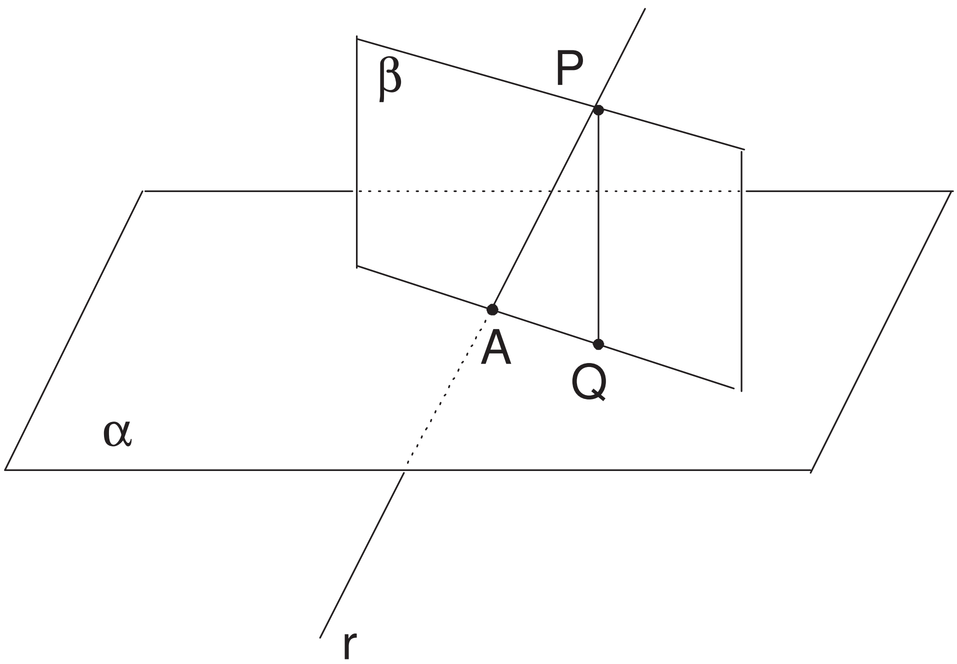

Figura 21.6: Plano contendo r e perpendicular a α.

Como β contém a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que é perpendicular a α, segue que $\beta \perp \alpha$. Além disso, β contém r (pois contém os pontos P e A, pertencentes a r). Está provado então que existe um plano perpendicular a α que contém r.

Para provar a unicidade, considere um plano γ contendo r e perpendicular a α. Como $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a α, obtém-se da proposição 24 que $\overleftrightarrow{PQ} \subset \gamma$ ou $\overleftrightarrow{PQ} // \gamma$. Não podemos ter o segundo caso, pois $P \in r \subset \gamma$. A conclusão é que $\overleftrightarrow{PQ}$ está contida em γ, de onde se conclui que γ contém os pontos P, Q e A. Mas esses pontos determinam o plano β, o que mostra que $\gamma = \beta$. Concluímos então que só existe um plano perpendicular a α contendo r. Provamos então a proposição a seguir:

Proposição 4

Se uma reta é oblíqua a um dado plano, existe um único plano contendo a reta e perpendicular a esse plano.

Podemos agora definir o ângulo entre uma reta e um plano.

Definição 1

Se uma reta é perpendicular a um plano, dizemos que eles formam um ângulo de 90^o. Se r é uma reta oblíqua a um plano α, e β é o plano contendo r e perpendicular a α, definimos o ângulo entre r e α como sendo o ângulo entre r e $s = \alpha \cap \beta$ (**Figura** 21.7).

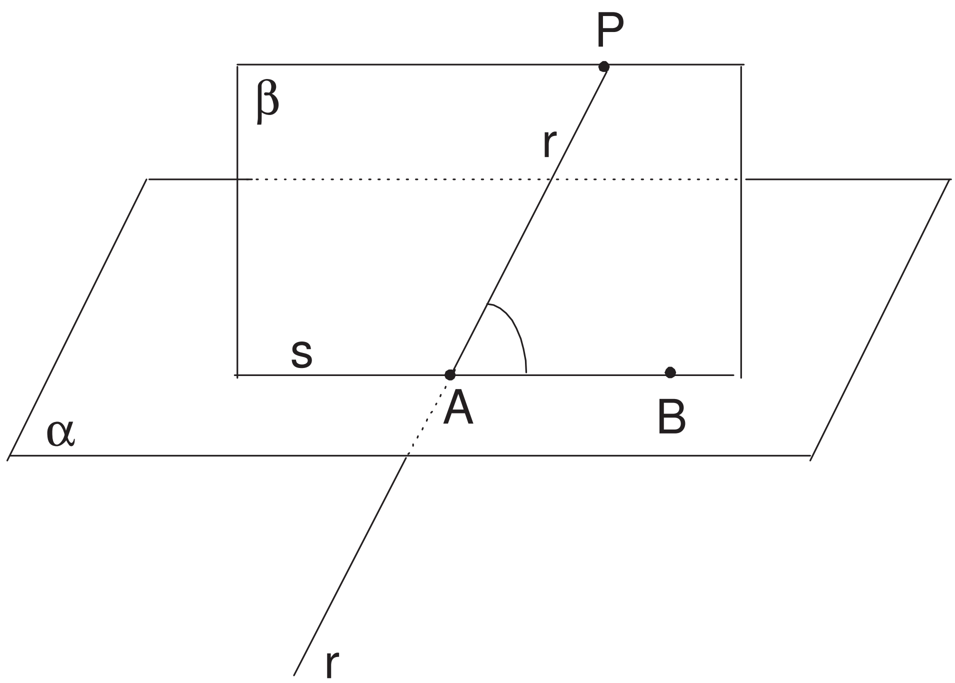

Figura 21.7: O ângulo entre r e α é o ângulo entre r e s.

Distâncias no espaço

Como você deve se lembrar, a distância entre dois pontos no plano é o comprimento do segmento de reta que une os dois pontos. Essa mesma forma de calcular a distância entre dois pontos também é usada para pontos no espaço. Vamos agora definir a distância entre ponto e reta e entre ponto e plano.

Definição 2

Considere um ponto P e uma reta r. Se $P \in r$, a distância de P a r é zero. Se $P \notin r$, seja α o plano que contém r e P, e seja s a única reta de α que passa por P e é perpendicular a r. Seja $Q = r \cap s$. A distância de P a r é definida como a medida do segmento PQ (**Figura** 21.8).

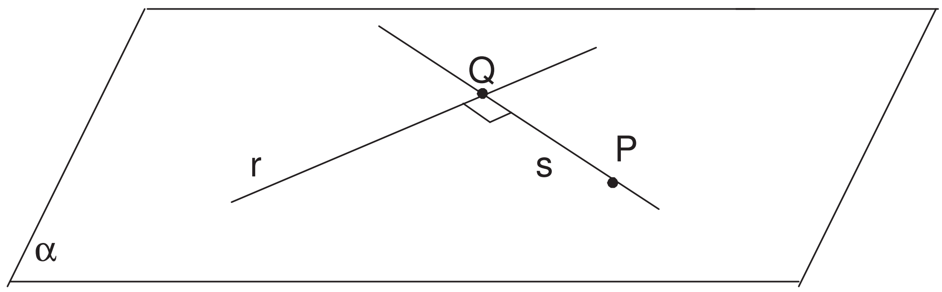

Figura 21.8: Distância de ponto a reta.

Observe que Q é o ponto de r mais próximo de P. Em outras palavras, tem-se $m(PR) > m(PQ)$ para qualquer outro ponto R na reta r.

Definição 3

Considere um ponto P e um plano α. Se $P \in \alpha$, a distância de P a α é zero. Se $P \notin \alpha$, seja Q o pé da perpendicular baixada de P a α. A distância de P a α é definida como a medida do segmento PQ (veja a **Figura** 21.9).

Como vimos no exercício 9 da aula 23, o ponto Q é o ponto de α mais próximo de P.

Definiremos, a seguir, a distância de reta a plano e a distância de plano a plano, que são bastante intuitivas. Ao final desta aula definiremos a distância entre duas retas no espaço, o que é um conceito um pouco mais elaborado.

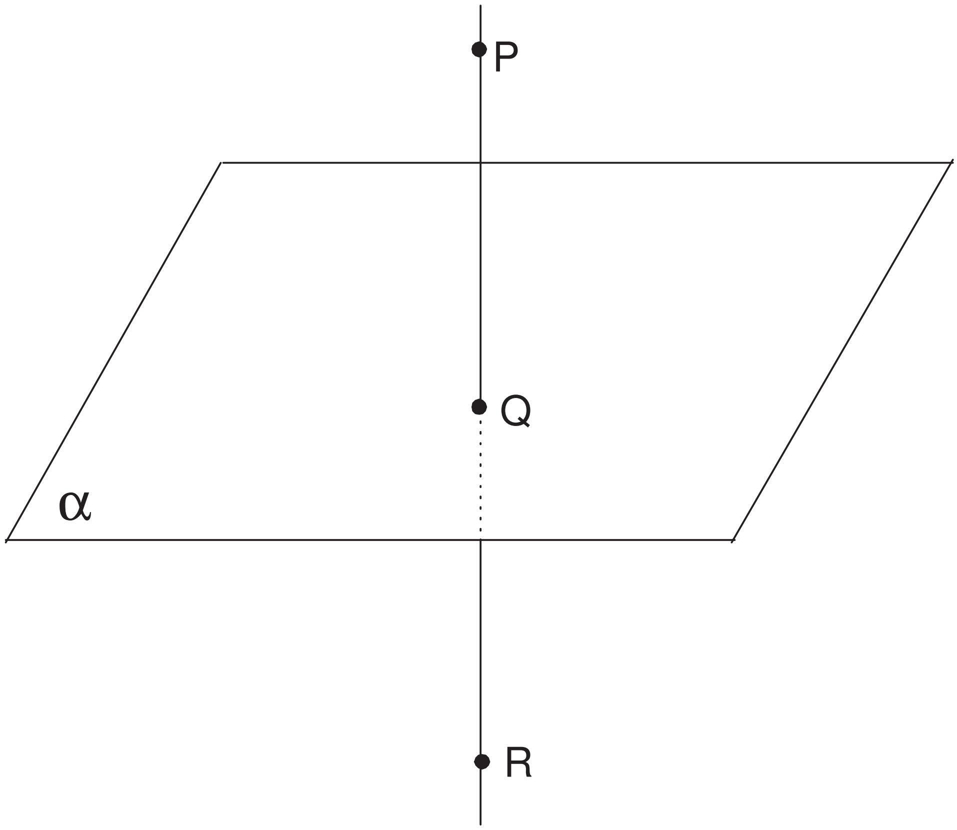

Figura 21.9: Distância de ponto a reta.

Definição 4

Considere uma reta r e um plano α. Se r intersecta α, a distância entre r e α é zero. Se r não corta α, ou seja, $r//\alpha$, segue pelo exercício 11 da aula 23 que, para quaisquer pontos A e B em r, a distância de A a α é igual à distância de B a α. Definimos a distância de r a α como sendo a distância de qualquer ponto de r a α. Veja a **Figura** 21.10.

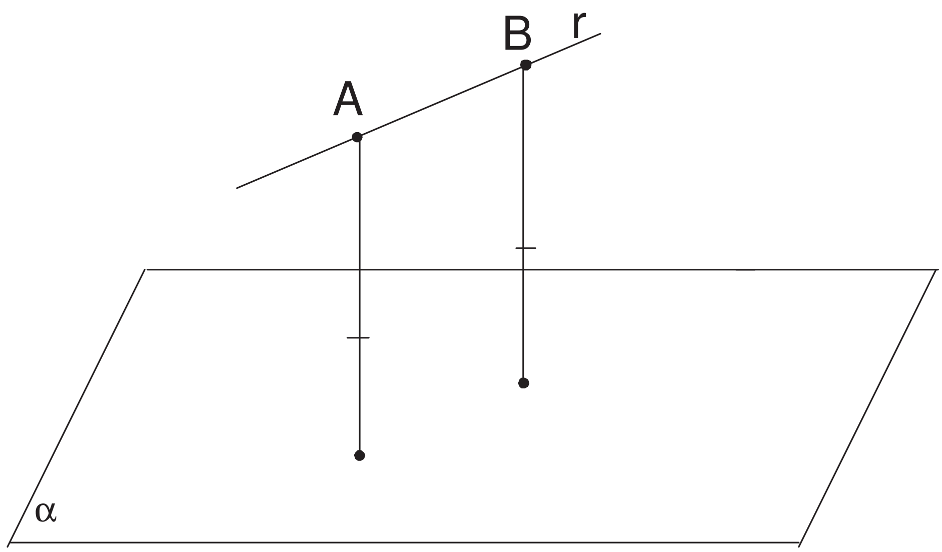

Figura 21.10: Distância de reta a plano.

Definição 5

Considere dois planos α e β. Se α intersectar β, a distância de α a β é zero. Se α é paralelo a β, segue do exercício 10 da aula 23 que, dados dois pontos A e B quaisquer do plano α, a distância de A a β é igual à distância de B a β, ou seja, esse valor não depende do ponto escolhido. A distância de α a β é definida como a distância de um ponto qualquer de α a β (ou vice-versa).

Vamos agora definir a distância entre duas retas. O caso mais simples é quando as duas retas em questão estão em um mesmo plano: são concorrentes ou paralelas. Veremos então esses dois casos primeiro.

Definição 6

Se duas retas são concorrentes, a distância de uma a outra é zero. Se duas retas r e s são paralelas, mostra-se (veja exercício 12) que dados quaisquer dois pontos A e B de r, a distância entre A e s é igual à distância entre B e s, ou seja, esse valor não depende do ponto (veja a **Figura 21.11**). Nesse caso, a distância de r a s é definida como a distância de um ponto qualquer de r a s.

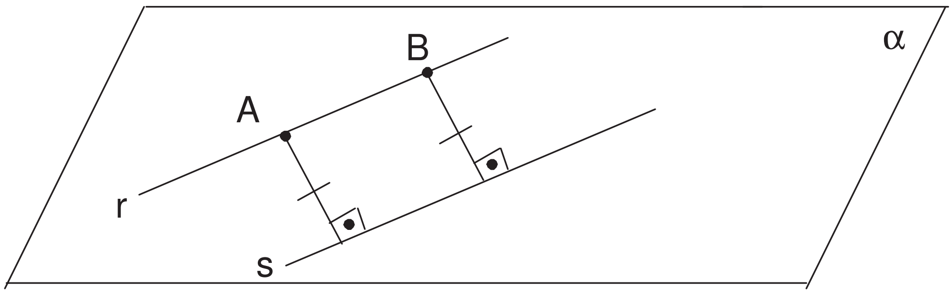

Figura 21.11: Distância entre retas paralelas.

Suponha agora que r e s sejam retas reversas. Sabemos, da proposição 11, da aula 20, que existem planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Tome um ponto $A \in r$, e seja B o pé da perpendicular baixada de A ao plano β. Seja r' a reta paralela a r passando por B. A reta r' corta s (por quê?) em um ponto que chamaremos C. Veja a **Figura 21.12**. Trace a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C. Essa reta corta r (por quê?) em um ponto que chamaremos D, também indicado na **Figura 21.12**. Temos que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular aos planos paralelos α e β, pois $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

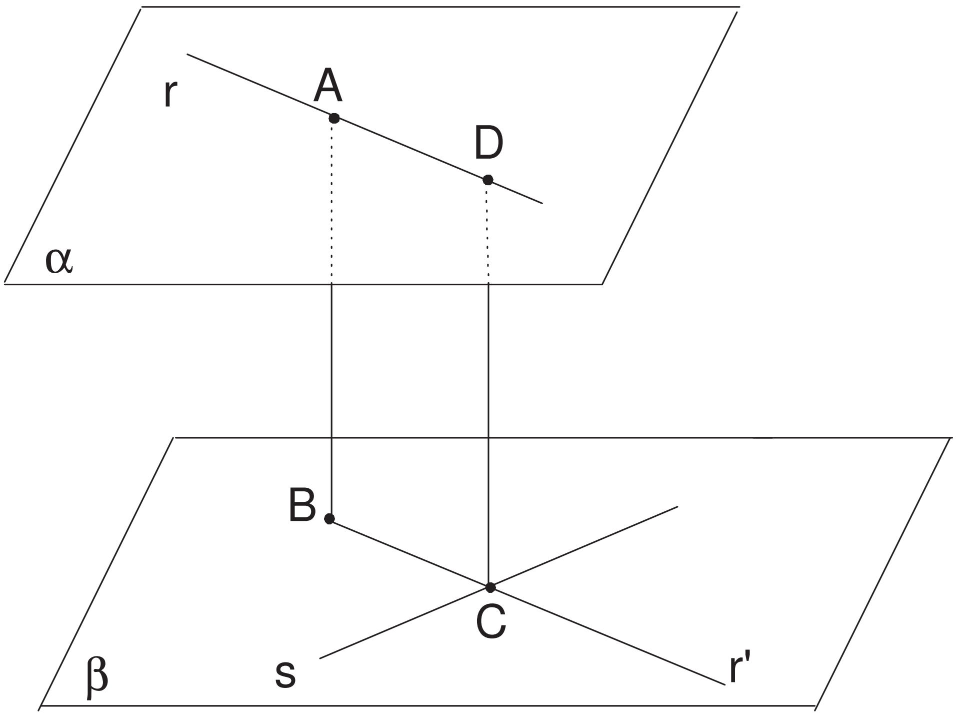

Figura 21.12: A distância de r a s é $m(CD)$.

Podemos provar (veja exercício 13 desta aula) que o segmento CD é o único, dentre aqueles que ligam um ponto de r a um ponto de s, que é perpendicular a r e a s ao mesmo tempo. Além disso, ele é o de menor comprimento, ou seja, $m(CD) < m(C'D')$, para quaisquer pontos $C' \in s$ e $D' \in r$ (veja o exercício 14). Isso motiva a seguinte definição:

Definição 7

Se r e s são retas reversas, a distância de r a s é a medida do único segmento com extremos em r e s que é perpendicular a r e a s.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Como calcular ângulos entre planos.
- Como calcular ângulos entre retas e planos.
- Como calcular distâncias entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre reta e plano, entre planos e entre retas.

Exercícios

1. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

   - Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
   - Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são perpendiculares entre si.
   - Se uma reta e um plano são paralelos, então todo plano perpendicular ao plano dado é perpendicular à reta.
   - Se uma reta é oblíqua a um de dois planos paralelos, então ela é oblíqua ao outro.
   - Não existem quatro retas perpendiculares duas a duas.

2. Se um plano γ é perpendicular a dois planos secantes α e β, mostre que γ é perpendicular à reta de interseção entre α e β.

3. Dados um plano α e uma reta r perpendicular a α, mostre que existem infinitos planos contendo r.

4. Se uma reta r está contida em um plano α e s é perpendicular a α, mostre que existe um único plano contendo s e perpendicular a r.

5. Se dois planos são paralelos, prove que todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

6. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que todo plano perpendicular a r é perpendicular a α.

7. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que existe um único plano contendo r e perpendicular a α.

8. Prove que o ângulo entre uma reta e um plano é igual ao ângulo entre essa reta e qualquer plano paralelo ao plano dado.

9. Se A e B são pontos distintos, prove que o conjunto de pontos do espaço que são equidistantes de A e B é um plano. Além disso, esse plano passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

10. Seja ABC um triângulo que não intersecta um plano α, e sejam a, b e c as distâncias de, respectivamente, A, B e C ao plano α. Prove que a distância do baricentro de ABC ao plano α é dada por $\dfrac{a+b+c}{3}$.

11. Seja r uma reta que corta um plano α, e seja s uma reta contida em α. Prove que o ângulo entre r e s é maior ou igual ao ângulo entre r e α.

12. Prove que retas paralelas são equidistantes. Mais precisamente, se r e s são retas paralelas, prove que a distância de A a s é igual à distância de B a s, quaisquer que sejam A e B pertencentes a r.

13. Se r e s são retas reversas, prove que existe somente um segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s.

14. Sejam r e s retas reversas e seja CD ($C \in A$ e $D \in r$) o único segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s. Prove que $m(CD) < m(C'D')$, quaisquer que sejam $C' \in s$ e $D' \in r$.

15. Prove a proposição 3 desta aula.

16. Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome pontos A e A' em r e sejam γ e γ' os planos perpendiculares a r e que passam por A e A', respectivamente. Sejam $s =$

$\gamma \cap \alpha$, $t = \gamma \cap \beta$, $s' = \gamma' \cap \alpha$ e $t' = \gamma' \cap \beta$ (veja a **Figura** 21.12. Prove que o ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t'.

Sugestão: Prove que $s//s'$ e $t//t'$. Inspire-se no exercício 12 da aula 23.

17. (UFF,1996) Considere dois planos α e β, secantes e não-perpendiculares, e um ponto P não pertencente a α nem a β. Pode-se afirmar que:

    (a) Toda reta que passa por P e é paralela a α também é paralela a β.

    (b) Toda reta que passa por P e intersecta α também intersecta β.

    (c) Se um plano contém P e intersecta α então ele intersecta β.

    (d) Existe um plano que contém P e é perpendicular a α e a β.

    (e) Existe um plano que contém P e é paralelo a α e a β.