

## Aula 28 – Volume de prismas e cilindros

### Objetivos

- Apresentar o Princípio de Cavalieri.
- Determinar o volume de um paralelepípedo usando o Princípio de Cavalieri.
- Calcular o volume de um prisma.
- Calcular o volume de um cilindro.



Cavalieri.  
1598 -1647.

### Introdução

A determinação do volume de um paralelepípedo qualquer mostra que a tarefa de determinar o volume dos sólidos, mesmo dos mais simples, não é uma tarefa fácil. Essa tarefa pode ser grandemente facilitada se utilizarmos o *Princípio de Cavalieri*.

#### Princípio de Cavalieri

Considere dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  e um plano  $\alpha$ . Suponha que, para todo plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , as seções planas  $\beta \cap S_1$  e  $\beta \cap S_2$  têm a mesma área. Então  $Vol(S_1) = Vol(S_2)$  (**Figura 28.1**).

Bonaventura Francesco Cavalieri se agregou à ordem dos Jesuítas em Milão em 1615, enquanto ainda era um garoto. Seu interesse em Matemática foi estimulado pelos trabalhos de Euclides e depois por Galileu. A teoria de indivisíveis apresentada por ele, em 1635, permitiu encontrar facilmente e rapidamente áreas e volumes de várias figuras geométricas.

Cavalieri também escreveu sobre seções cônicas, trigonometria, ótica, astronomia e astrologia.

Consulte:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cavalieri.html>

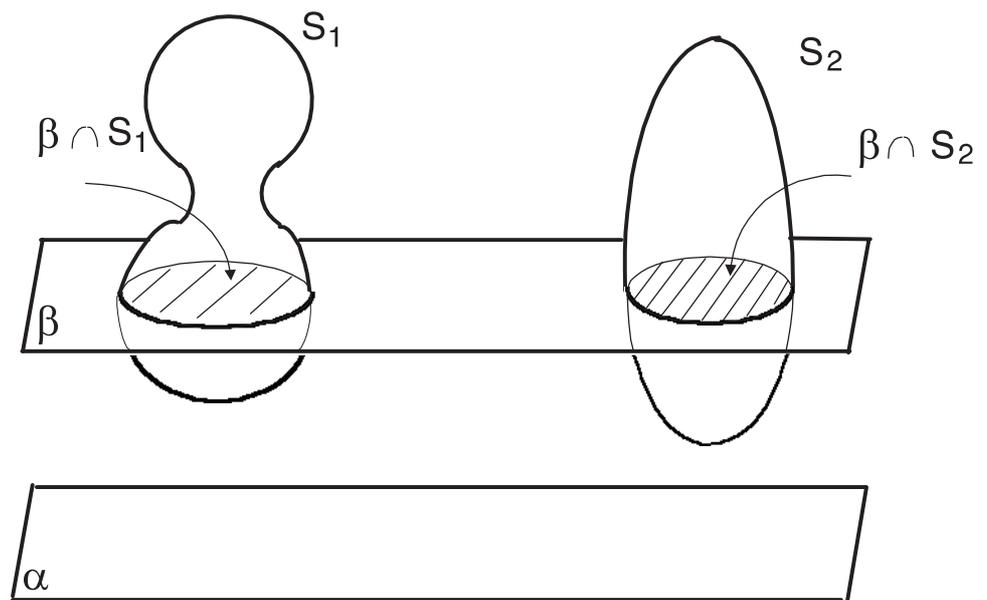


Figura 28.1: Princípio de Cavalieri.

## Cálculo do volume do paralelepípedo usando o princípio de Cavalieri

Vejam, agora, como se torna simples a prova para a fórmula do volume de um paralelepípedo qualquer, quando se utiliza o princípio de Cavalieri. Seja  $S_1 = ABCDEFGH$  um paralelepípedo qualquer e sejam  $\alpha$  e  $\beta$  os planos das faces  $ABCD$  e  $EFGH$  (veja a **Figura 28.2**).

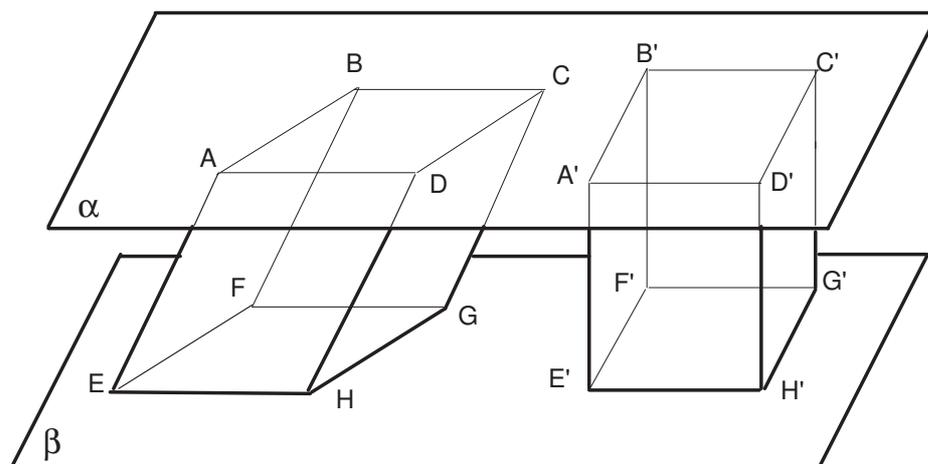


Figura 28.2: Cálculo do volume de um paralelepípedo.

No plano  $\alpha$ , tome um retângulo  $A'B'C'D'$  que tem a mesma área que  $ABCD$  e, pelos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  trace perpendiculares a  $\alpha$ . Essas retas cortam o plano  $\beta$  em pontos  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$  e  $H'$  (veja a **Figura 28.2**). O paralelepípedo  $S_2 = A'B'C'D'E'F'G'H'$  obtido é retangular. Seja  $\gamma$  um plano qualquer paralelo ao plano  $\beta$  e que corta  $S_1$  e  $S_2$ . Sabemos que  $\gamma \cap S_1$  é congruente a  $EFGH$  e  $\gamma \cap S_2$  é congruente a  $E'F'G'H'$  (veja a **Figura 28.3**).  
 Logo,

Usaremos a notação  $Vol(S)$  para designar o volume do sólido  $S$ .

$$\text{Área}(\gamma \cap S_1) = \text{Área}(EFGH) = \text{Área}(E'F'G'H') = \text{Área}(\gamma \cap S_2)$$

para todo plano  $\gamma$  paralelo a  $\beta$ .

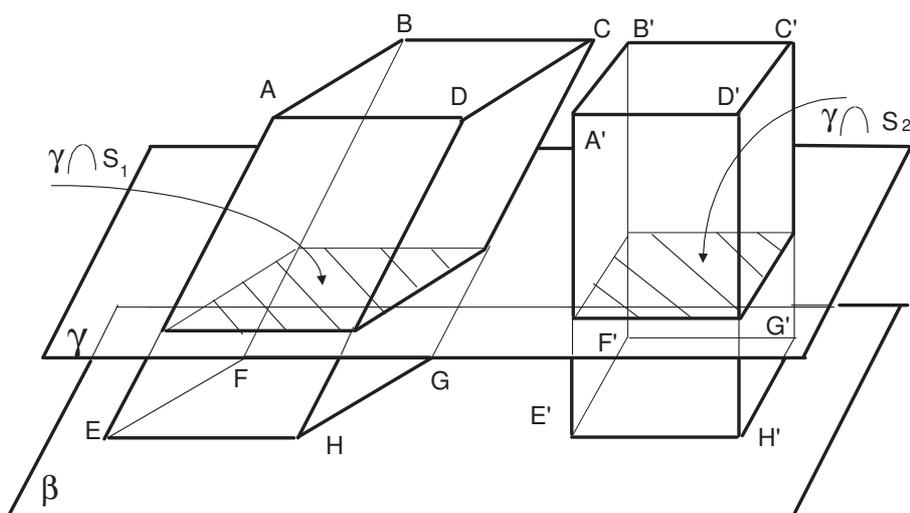


Figura 28.3:  $\gamma \cap S_1$  e  $\gamma \cap S_2$  têm a mesma área.

Pelo Princípio de Cavalieri tem-se

$$\text{Vol}(S_1) = \text{Vol}(S_2)$$

Como já sabemos que o volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura, temos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S_1) = \text{Vol}(S_2) &= \text{Área}(E'F'G'H')m(A'E') = \\ &= \text{Área}(EFGH).altura(S_1) \end{aligned}$$

O Princípio de Cavalieri é, na verdade, um teorema; isto é, ele pode ser provado. Sua prova, porém, envolve conceitos avançados da Matemática, que ainda não temos condições de abordar. Embora possamos obter o volume dos principais sólidos (cilindros, prismas, cones,

pirâmides, esferas etc.) sem utilizar o princípio de Cavalieri, a utilização desse princípio simplifica bastante a determinação de alguns desses volumes. Em vista disso, neste curso esse princípio será aceito como verdadeiro, sem prova.

### Cálculo do volume do prisma

Um procedimento análogo ao utilizado na determinação do volume de um paralelepípedo, pode ser utilizado na determinação do volume de um prisma qualquer. Seja  $S$  um prisma cuja base é um polígono  $P$  qualquer. No plano da base, considere um retângulo  $ABCD$  de área igual à área de  $P$ . Sobre esse retângulo construa um paralelepípedo retangular  $S'$  de altura igual à altura de  $S$ . Seja  $\gamma$  um plano paralelo à base de  $S$  e que é secante a  $S$  (veja na **Figura 28.4** um caso particular onde a base de  $S$  é um hexágono).

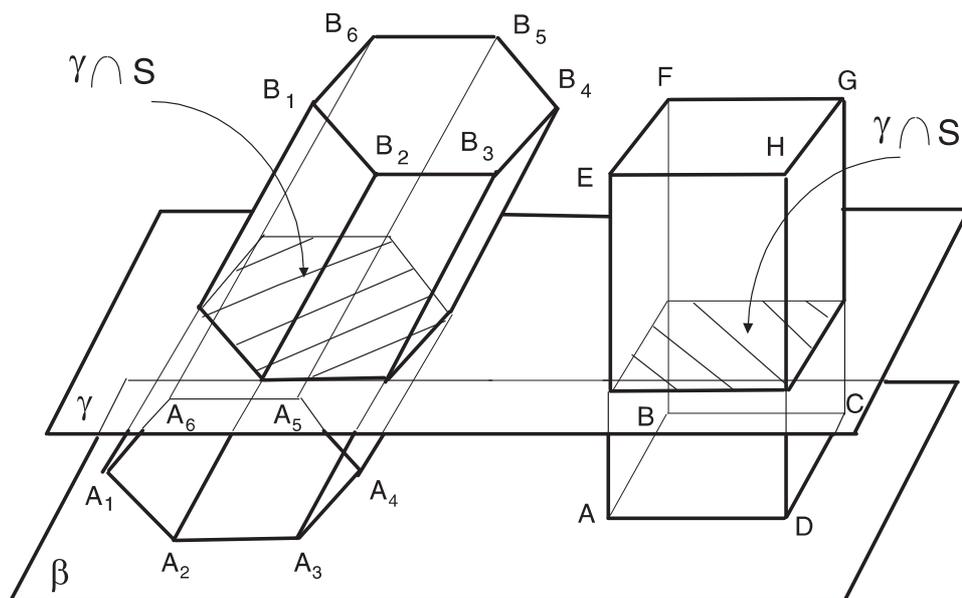


Figura 28.4: Cálculo do volume do prisma.

Sabemos que  $\gamma \cap S$  é congruente a  $P$  e que  $\gamma \cap S'$  é congruente a  $ABCD$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Área}(\gamma \cap S) &= \text{Área}(P) = \text{Área}(ABCD) = \\ &= \text{Área}(\gamma \cap S') \end{aligned}$$

para todo plano  $\gamma$  paralelo à base de  $S$ .

Pelo Princípio de Cavalieri, tem-se

$$\text{Vol}(S) = \text{Vol}(S') = \text{Área}(ABCD) \cdot m(AE).$$

Provamos então que

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

## Cálculo do volume do cilindro

Para determinar o volume de um cilindro, procedemos de maneira análoga à do cálculo do volume de um prisma. Dado um cilindro  $C$  (reto ou oblíquo) de altura  $h$  e cuja base é um círculo  $\Gamma$  contido em um plano  $\alpha$ , considere um paralelepípedo retangular  $R$  de altura  $h$  e cuja base é um retângulo contido em  $\alpha$  e de mesma área que  $\Gamma$  (veja **Figura 28.5**).

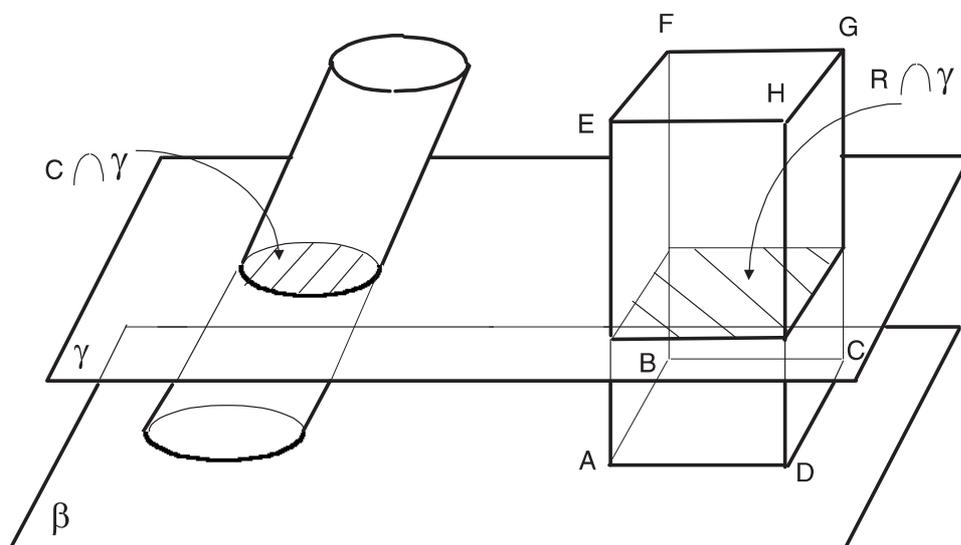


Figura 28.5: Cálculo do volume do cilindro.

Para todo plano  $\gamma$ , paralelo a  $\alpha$  e secante a  $C$ , tem-se

$$\text{Área}(C \cap \gamma) = \text{Área}(\Gamma) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(R \cap \gamma).$$

Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que

$$\text{Vol}(C) = \text{Vol}(R) = \text{Área}(ABCD) \cdot m(AE) = \text{Área}(\Gamma) \cdot \text{altura}(C).$$

Provamos então que

O volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela altura.

## Resumo

Nessa aula você aprendeu...

- O Princípio de Cavalieri.
- A calcular o volume de um prisma.
- A calcular o volume de um cilindro.

## Exercícios

1. Calcule o volume de um prisma reto de  $3\text{ m}$  de altura, cuja base é um hexágono regular, sabendo que se a altura fosse de  $5\text{ m}$  o volume aumentaria em  $6\text{ m}^3$ .
2. Um prisma reto tem  $12\text{ cm}$  de altura e sua base é um triângulo cujos lados medem  $2\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  e  $(20 + 8\sqrt{3})\text{ cm}$ . Determine o volume do prisma.
3. Calcule o volume de um prisma reto de altura  $a$  e cuja base é um pentágono (dodecágono) regular de lado  $a$ .

4. Em um prisma oblíquo, a aresta lateral mede  $6\text{ cm}$  e sua seção reta (perpendicular às arestas laterais) é um hexágono regular de  $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$ . Determine a área lateral e o volume desse prisma.
5. Um cilindro, de raio da base igual a  $4\text{ cm}$  e geratriz medindo  $6\text{ cm}$ , tem seu eixo formando um ângulo de  $45^\circ$  com o plano da base. Determine o volume desse cilindro.
6. Deseja-se construir um reservatório na forma de um cilindro equilátero e que tenha volume igual a um reservatório na forma de um paralelepípedo retangular de dimensões  $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ . Qual o raio do cilindro?
7. Quantos litros de água deve conter aproximadamente um reservatório cilíndrico de  $3\text{ m}$  de raio e  $8\text{ m}$  de altura?
8. Em um reservatório cilíndrico de raio igual a  $50\text{ cm}$ , colocou-se uma pedra, o que elevou em  $35\text{ cm}$  o nível da água. Determine o volume da pedra.
9. Com uma folha de zinco de  $5\text{ m}$  de comprimento e  $4\text{ m}$  de largura, podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Em qual dos casos o volume será maior?

Lembre-se  
que...  
 $1\ell = 1\text{ dm}^3$

10. Um cilindro reto de raio  $r$  e altura  $h$  é cortado por um plano paralelo ao seu eixo. Se a distância entre o eixo e o plano é  $\frac{r}{2}$ , determine os volumes dos sólidos obtidos.
11. Um sólido  $S$  está localizado entre dois planos horizontais  $\alpha$  e  $\beta$ , cuja distância é de  $1\text{ m}$ . Cortando o sólido por qualquer plano horizontal compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$ , obtém-se como seção um disco de raio igual a  $1\text{ m}$ .
- a) Pode-se garantir que o sólido  $S$  é um cilindro? Justifique.
- b) Calcule o volume de  $S$ .
12. (PUC-SP, 1985) Se a área da base de um prisma diminui  $10\%$  e a altura aumenta  $20\%$ , o seu volume:
- (a) aumenta  $8\%$ .
- (b) aumenta  $15\%$ .
- (c) aumenta  $108\%$ .
- (d) diminui  $8\%$ .
- (e) não se altera.

13. (VUNESP-1988) Considere um galpão como o da **Figura 28.6**

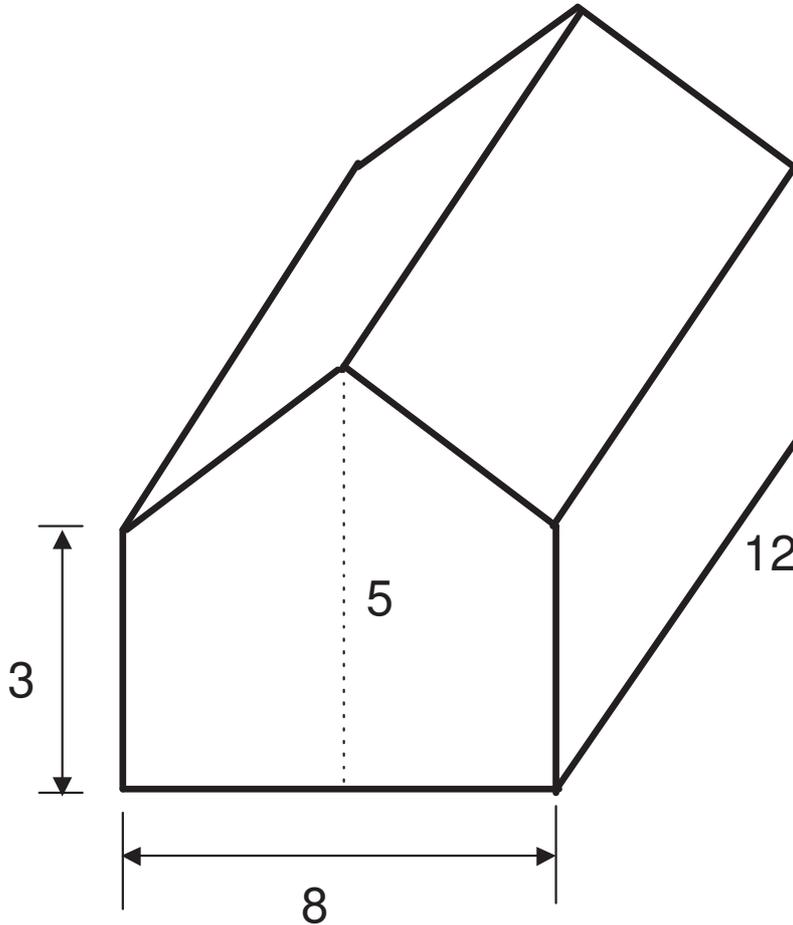


Figura 28.6: Exercício 13.

O volume de ar contido no galpão é igual a:

- (a) 288    (b) 384    (c) 480    (d) 360    (e) 768
14. (CRESCEM, 1977) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é  $\frac{1}{4}$  da altura da lata e cujo diâmetro da

base é  $\frac{1}{3}$  do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:

- (a) 6    (b) 12    (c) 18    (d) 24    (e) 36

15. (CESGRANRIO, 1983) Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio d'água, tem  $10 \text{ dm}$  de altura e  $5 \text{ dm}$  de raio da base. Inclinando-se o tonel de  $45^\circ$ , o volume de água derramada é, aproximadamente:

- (a)  $145 \text{ dm}^3$     (b)  $155 \text{ dm}^3$     (c)  $263 \text{ dm}^3$   
(d)  $353 \text{ dm}^3$     (e)  $392 \text{ dm}^3$

16. (U.F.GO, 1984) Um pedaço de cano, de  $30 \text{ cm}$  de comprimento e  $10 \text{ cm}$  de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e possui a parte inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água:

- a) irá ultrapassar o meio do cano  
b) transbordará  
c) não chegará ao meio do cano  
d) encherá o cano até a borda  
e) atingirá exatamente o meio do cano