# Aula 27 – Introdução ao conceito de volume

## Objetivos

- Introduzir o conceito de volume.
- Calcular o volume de um paralelepípedo.

## Introdução

Considere dois recipientes, um cúbico e outro de forma qualquer (veja a **Figura** 27.1). Suponha que se utilizem $n$ litros de líquido para encher o primeiro recipiente e $m$ litros de líquido para encher o segundo.

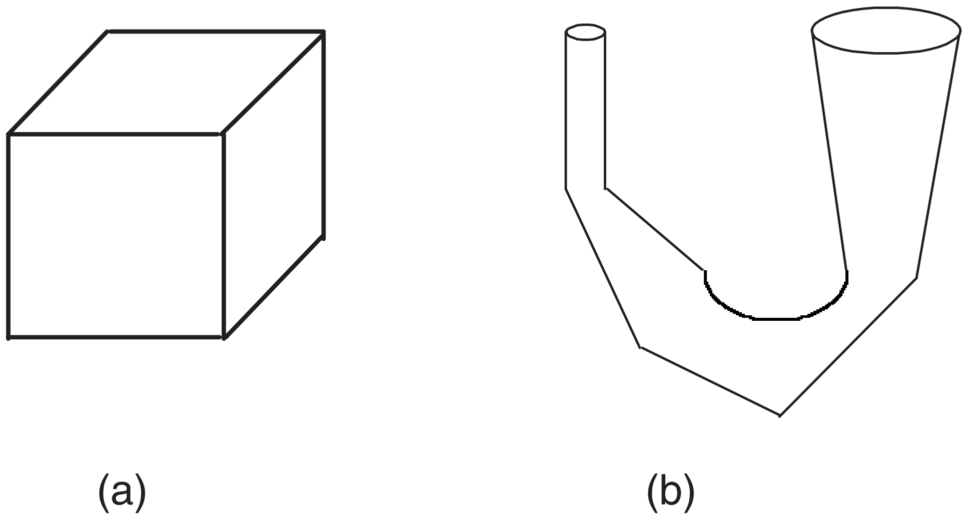

Figura 27.1: (a) Recipiente cúbico. (b) recipiente de forma qualquer.

O número $\dfrac{m}{n}$ é uma medida de quanto o segundo recipiente é maior (ou menor) que o primeiro. Podemos dizer que o espaço ocupado pelo segundo recipiente é $\dfrac{m}{n}$ vezes o espaço ocupado pelo primeiro. Por exemplo, uma garrafa de 3 litros d'água ocupa 3/2 mais espaço que uma garrafa de 2 litros.

A noção de volume de um sólido está relacionada ao espaço por ele ocupado. Com relação ao nosso exemplo, se adotarmos o primeiro recipiente como unidade de volume, dizemos que o volume do segundo recipiente é $\dfrac{m}{n}$. O volume do primeiro recipiente é 1. Assim, para se determinar o volume de um recipiente, é só enchê-lo e verificar a quantidade de líquido utilizada.

Esse método empírico para se determinar volume, contudo, pode ser indesejável (imagine um recipiente do tamanho de um estádio de futebol!) ou mesmo impraticável (qual o volume da terra?). Além disso, deseja-se, na prática, fazer o caminho inverso: deseja-se saber, a priori, a quantidade de líquido necessária para se encher um determinado recipiente ou quais devem ser as dimensões de uma caixa d'água para que sua capacidade seja de 1000 litros. Para que isso seja possível, devemos ser capazes de determinar o volume dos sólidos utilizando apenas o raciocínio lógico e algumas propriedades. Para isso, escolhe-se como unidade de volume um cubo de lado 1.

Dizemos que esse cubo tem volume igual a 1. Se a aresta do cubo medir $1\,cm$, o volume do cubo será $1\,cm^3$ (lê-se "um centímetro cúbico"), se a aresta medir $1\,m$, o volume será $1\,m^3$ ("um metro cúbico"), e assim por diante.

A determinação do volume dos sólidos será feita com base nas três propriedades a seguir:

$P_1$ : A todo "sólido no espaço" está associado um número real positivo, chamado seu volume.

$P_2$ : Sólidos congruentes têm o mesmo volume (por exemplo, duas esferas de mesmo raio, ou dois cilindros retos de mesmo raio da base e mesma altura).

$P_3$ : Se um sólido $S$ é dividido em dois sólidos $S_1$ e $S_2$, então o volume de $S$ é a soma dos volumes de $S_1$ e $S_2$.

## Volume do paralelepípedo

Vejamos como utilizar as propriedades $P_1$, $P_2$ e $P_3$ para determinar o volume dos principais sólidos.

Primeiramente, considere o cubo escolhido como unidade de volume e divida cada uma de suas arestas em $n$ partes iguais, obtendo $n^3$ cubinhos justapostos, todos de aresta medindo $\frac{1}{n}$ (veja na **Figura** 27.2 um caso particular em que $n = 3$).

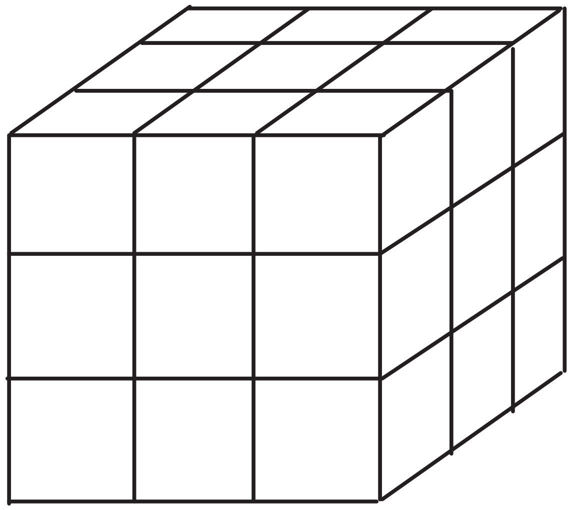

Figura 27.2: Cubo dividido em 27 cubos menores de aresta medindo $\frac{1}{3}$.

Pela propriedade $P_2$, todos os $n^3$ cubinhos têm o mesmo volume. Além disso, pela propriedade $P_3$ o volume do cubo original é a soma dos volumes dos $n^3$ cubinhos. Segue que o volume de cada cubinho é $\dfrac{1}{n^3}$. Compare com os resultados da aula 13 sobre área de figuras planas.

Nosso objetivo, agora, é determinar o volume de um paralelepípedo retangular $ABCDEFGH$ cujas arestas medem $a$, $b$ e $c$. O argumento que utilizaremos é análogo ao utilizado para o cálculo da área de um retângulo. Tome um vértice qualquer do paralelepípedo e considere as semi-retas que partem desse vértice e contêm arestas do paralelepípedo. Sobre essas semi-retas, marque segmentos de medidas $\dfrac{1}{n}$ (veja a **Figura** 27.3).

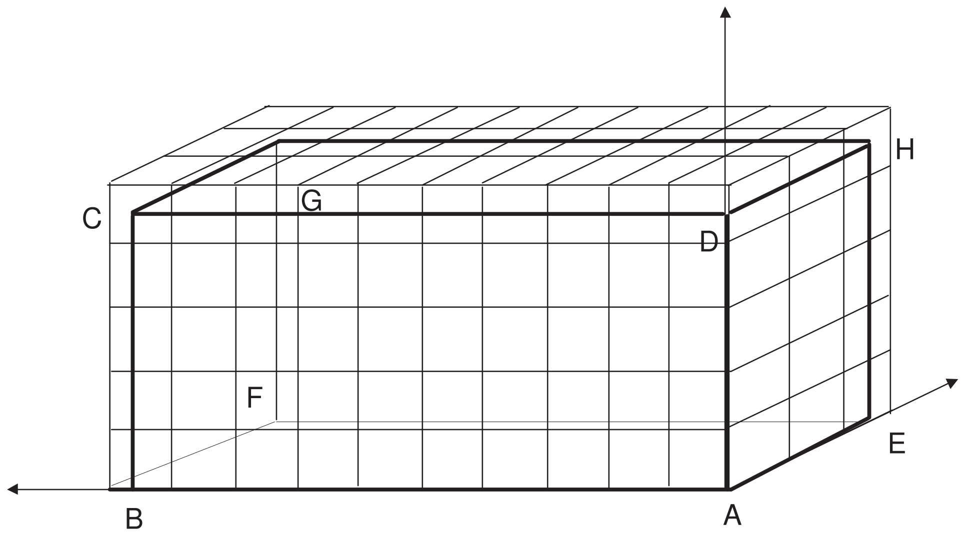


Figura 27.3: Divisão do paralelepípedo para cálculo do volume.

Para facilitar a discussão, admita que tenhamos $m(AB) = a$, $m(AD) = b$ e $m(AE) = c$. Sejam $p$ o número de segmentos de medida $\frac{1}{n}$ que cabem em $AB$, $q$ o número desses segmentos que cabem em $AD$ e $s$ o número desses segmentos que cabem em $AE$ ( a **Figura** 27.3 ilustra um caso particular em que $p = 9$, $q = 4$ e $s = 2$).

Temos,

$$p.\frac{1}{n} \leq a < (p+1)\frac{1}{n} \quad ,$$

$$q.\frac{1}{n} \leq b < (q+1)\frac{1}{n} \qquad \text{e}$$

$$s.\frac{1}{n} \leq c < (s+1)\frac{1}{n}$$

donde se conclui que

$$\text{(I)} \qquad pqs\frac{1}{n^3} \leq abc < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Por outro lado, o paralelepípedo retangular cujas arestas medem $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$ e $\frac{s}{n}$ está inteiramente contido em nosso paralelepípedo $ABCDEFGH$ e é formado por $pqs$ cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Como já sabemos que o volume de cada um desses cubinhos é $\frac{1}{n^3}$, segue que o volume de $ABCDEFGH$ satisfaz

$$\text{(II)} \qquad V \geq psq\frac{1}{n^3}$$

Além disso, o paralelepípedo retangular cujas arestas medem $\frac{p+1}{n}$, $\frac{q+1}{n}$ e $\frac{s+1}{n}$ contém $ABCDEFGH$ e é formado por $(p+1)(q+1)(s+1)$ cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Então,

$$\text{(III)} \qquad V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Juntando (II) e (III) obtemos

$$\text{(IV)} \qquad pqs\frac{1}{n^3} \leq V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

De (I) e (IV) conclui-se que

$$\begin{aligned} |\, V - abc \,| &< (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3} - pqs\frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{pq}{n^2} + \frac{ps}{n^2} + \frac{qs}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{q}{n^2} + \frac{s}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Como $\frac{p}{n} \leq a$, $\frac{q}{n} \leq b$ e $\frac{s}{n} \leq c$, resulta que

$$\begin{aligned} \mid V - abc \mid &< \frac{1}{n}\left(ab + ac + bc + \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &< \frac{1}{n}(ab + ac + bc + a + b + c + 1) \end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida para qualquer inteiro positivo $n$. Note que o lado direito da desigualdade fica tão pequeno quanto desejarmos, bastando para isso tomar $n$ bastante grande. Isso mostra que $\mid V - abc \mid$ é menor que qualquer número real positivo, o que só é possível se $\mid V - abc \mid = 0$.

Assim, $V = abc$. Notando que $ac$ é a área do retângulo $ABFE$ e que $b$ é a altura do paralelepípedo, provamos então que

| |
|---|
| O volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura. |

Lembramos que um paralelepípedo retangular tem como base um retângulo e suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Nosso objetivo agora é determinar o volume de um paralelepípedo $ABCDEFGH$ qualquer. Para isso, consideraremos $ABCD$ e $EFGH$ como bases. No plano da base $EFGH$, trace perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{FG}$ a partir dos pontos $E$ e $H$, obtendo pontos $F_1$ e $G_1$ (veja **Figura** 27.4).

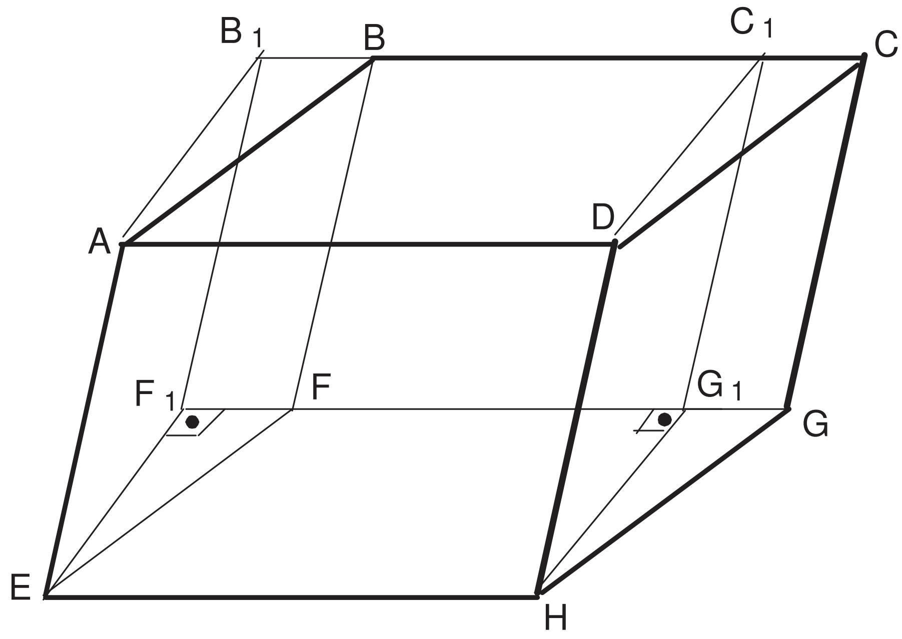


Figura 27.4: Transformação para um paralelepípedo de base retangular.

O quadrilátero obtido $EF_1G_1H$ é um retângulo (lembre que $\overleftrightarrow{EH}$ é paralelo a $\overleftrightarrow{FG}$. Pelos pontos $F_1$ e $G_1$ trace retas paralelas a $\overleftrightarrow{AE}$ e sejam $B_1$ e $C_1$ os pontos em que essas retas intersectam o plano que contém $ABCD$ (**Figura** 27.4). O paralelepípedo $AB_1C_1DEF_1G_1H$ é um paralelepípedo de bases retangulares e sua altura é a mesma do paralelepípedo original $ABCDEFGH$. Além disso, as bases desses paralelepípedos têm a mesma área (por quê?). Observe que podemos sobrepor o sólido $DC_1CHG_1G$ sobre o sólido $AB_1BEF_1F$ através de uma translação ao longo da reta $\overleftrightarrow{AD}$. Segue que esses dois sólidos são congruentes e, portanto, têm o mesmo volume. Concluímos que os paralelepípedos $ABCDEFGH$ e $AB_1C_1DEF_1G_1H$ têm o mesmo volume. Tudo o que fizemos foi partir de um paralelepípedo qualquer e obter um paralelepípedo de bases retangulares com mesmo volume, mesma área da base e mesma altura.

Agora, vamos transformar o paralelepípedo $AB_1C_1DEF_1G_1H$ em um paralelepípedo retangular de mesma altura, mesma área da base e mesmo volume. Como já sabemos calcular o volume de um paralelepípedo retangular, determinaremos o volume de $AB_1C_1DEF_1G_1H$ (e, portanto, do paralelepípedo original $ABCDEFGH$). No plano que contém a face $DC_1G_1H$, trace pelos pontos $H$ e $G_1$ segmentos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{DC_1}$, obtendo pontos $D_1$ e $C_2$. Faça o mesmo no plano da face $AB_1F_1E$, e obtenha pontos $A_1$ e $B_2$ (veja **Figura** 27.5).

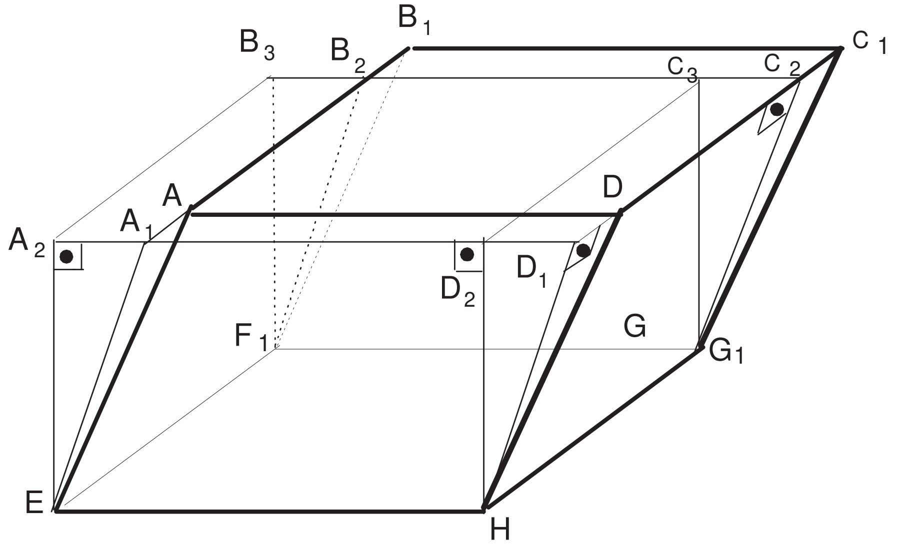


Figura 27.5: Transformação para um paralelepípedo de base retangular.

Podemos provar (veja o primeiro exercício desta aula) que $A_1B_2C_2D_1$
$EF_1G_1H$ é um paralelepípedo com o mesmo volume que $AB_1C_1DEF_1G_1H$. Evidentemente, $AB_1C_1DEF_1G_1H$ e $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ têm a mesma altura e as áreas de suas bases são iguais.

Finalmente, no plano da face $A_1D_1HE$, trace pelos pontos $E$ e $H$ segmentos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{A_1D_1}$, obtendo pontos $A_2$ e $D_2$. Faça o mesmo no plano da face $B_2C_2G_1F_1$ e obtenha os pontos $B_3$ e $C_3$. Podemos provar (veja os exercícios desta aula) que $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$ é um paralelepípedo retangular que tem o mesmo volume que $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$. Evidentemente, esses dois paralelepípedos têm a mesma altura e as áreas de suas bases são iguais.

Nosso paralelepípedo original $ABCDEFGH$ foi transformado no paralelepípedo retangular $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$ através das seguintes transformações:

$ABCDEFGH \to AB_1C_1DEF_1G_1H$

$\to A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H \to A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H.$

Em cada uma dessas transformações, foram preservados o volume, a altura e as áreas das bases. Logo,

$\text{Vol}(ABCDEFGH) =$

$= \text{Vol}(A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H)$

$= \text{Área}(EF_1G_1H)m(A_2E) =$

$\text{Área}(EFGH)m(A_2E)$

Como $m(A_2E)$ é exatamente a altura do paralelepípedo $ABCDEFGH$ em relação à base $EFGH$, provamos o seguinte resultado:

| |
|---|
| O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura relativa à base |

## Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O conceito de volume de um sólido.
- Que o volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura relativa à base.

## Exercícios

1. O objetivo deste exercício é mostrar que o sólido $A_1B_1C_2D_1EF_1G_1H$, da **Figura 27.5**, do texto, é um paralelepípedo que tem o mesmo volume que o paralelepípedo
   $AB_1C_1DEF_1G_1H$. Isso deve ser feito da seguinte forma: faremos uma série de afirmações e a você caberá justificar cada uma delas.

   Seja $\alpha$ o plano que contém os pontos $D_1$, $H$ e $E$, e $\beta$ o plano que contém os pontos $A_1$, $E$ e $H$. Justifique as afirmações a seguir:

   i) A reta $\overleftrightarrow{HG_1}$ é perpendicular ao plano $\alpha$.

   ii) $\overleftrightarrow{EF_1}$ é perpendicular ao plano $\alpha$.

   iii) $\overleftrightarrow{EF_1}$ é perpendicular ao plano $\beta$.

   iv) $\alpha = \beta$ e, portanto, as retas $\overleftrightarrow{EA_1}$ e $\overleftrightarrow{HD_1}$ são coplanares.

   v) Os planos das faces $DC_1G_1H$ e $AB_1F_1E$ são paralelos.

   vi) $\overleftrightarrow{EA_1}$ e $\overleftrightarrow{HD_1}$ são paralelas.

vii) $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ é um paralelepípedo.

viii) Os sólidos $EA_1ADD_1H$ e $F_1B_2B_1C_1C_2G_1$ são congruentes.

ix) $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ e $AB_1C_1DEF_1G_1H$ têm o mesmo volume.

2. Tomando como base o exercício 1, prove que o sólido $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$, da **Figura 27.5**, é um paralelepípedo retangular que tem o mesmo volume que o paralelepípedo $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$.

3. Determine o volume de um cubo, sabendo que ele foi confeccionado a partir de uma folha de zinco de $600\,cm^2$.

4. Um depósito, em forma de um cubo, com capacidade para 8000 litros, está completamente cheio de água. Deseja-se transferir toda a água para um outro reservatório, na forma de um paralelepípedo retangular, cujas dimensões são $3,0\,m$ de comprimento, $2,5\,m$ de largura e $4,0\,m$ de altura. Que altura alcançará a água?

5. Um paralelepípedo retangular tem base quadrada e sua diagonal forma um ângulo de $60^o$ com o plano da base. Se o volume do paralelepípedo é de $36.000\,cm^3$, determine a área total do paralelepípedo.

6. Oito cubos iguais são dispostos de modo a formar um paralelepípedo retangular. Determine a forma do paralelepípedo para que a superfície tenha área mínima.

7. Entre todos os paralelepípedos retangulares de mesmo volume, qual o de menor área total?

8. Se dois paralelepípedos têm a mesma base e suas alturas são iguais, pode-se dizer que suas áreas laterais são iguais? Justifique a sua resposta.

9. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado $a$ e suas arestas laterais medem $2a$. Se uma das arestas laterais forma um ângulo de $60^o$ com os lados adjacentes da base e o volume do paralelepípedo é $8\sqrt{2}\,cm^3$, determine $a$.

10. (F.C.M. SANTA CASA, 1982) Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo $50\,cm$ de comprimento por $30\,cm$ de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de $8\,cm$ de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em $cm^3$, será:

    (a) 1244 (b) 1828 (c) 2324 (d) 3808 (e) 12000

11. (U.F.GO, 1983) A aresta, a diagonal e o volume de um cubo estão, nessa ordem, em progressão geométrica. A área total desse cubo é:

    (a) $6\sqrt{3}$ (b) $6(2\sqrt{3}-1)$ (c) 3 (d) 12 (e) 18

12. (CESGRANRIO, 1988) Um tanque cúbico, com face inferior horizontal, tem $1\,m^3$ de volume e contém água até sua metade. Após mergulhar uma pedra de granito, o nível da água subiu $8\,cm$. O volume dessa pedra é:

    (a) $80\,cm^3$ (b) $800\,cm^3$ (c) $8000\,cm^3$ (d) $80000\,cm^3$ (e) $800000\,cm^3$

13. (U.F.C., 1992) As dimensões da base de um paralelepípedo retangular $P$ são $3\,m$ e $5\,m$, e seu volume é $60\,m^3$. O comprimento, em metros, do maior segmento de reta que une dois pontos de $P$ é igual a:

    (a) $2\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $4\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{2}$ (e) $6\sqrt{2}$