Aula 26 – Poliedros

Objetivos

- Identificar poliedros
- Aplicar o Teorema de Euler

Introdução

Nesta aula estudaremos outros exemplos de "figuras" no espaço: os *poliedros*

Começaremos com a definição geral, dada a seguir.

Definição 1

Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados *faces*, tais que:

- cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
- a interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia.

Cada lado de cada polígono é chamado *aresta* do poliedro, e cada vértice de cada polígono é chamado *vértice* do poliedro.

Todo poliedro limita uma região do espaço chamada *interior do poliedro*. Também chamaremos de poliedro a união de um poliedro com seu interior.

Como exemplos de poliedros, podemos citar todos os prismas e todas as pirâmides. A **Figura** 26.1 apresenta outros exemplos de poliedros.

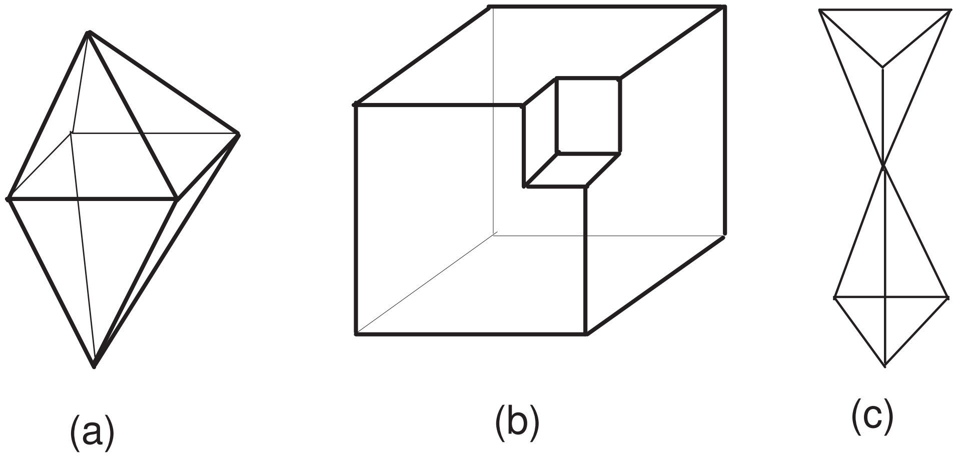

Figura 26.1: Exemplos de poliedros.

A **Figura** 26.2 mostra exemplos de figuras que não são poliedros.

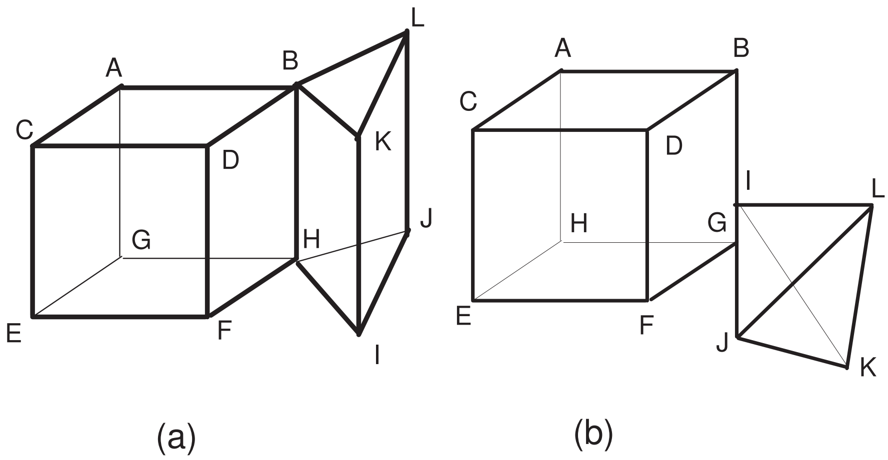

Figura 26.2: Exemplos de figuras que não são poliedros.

O exemplo da **Figura** 26.2(a) não é poliedro, pois a aresta BH é lado de quatro faces (DFHB, BHIK, BHJL e AGHB), não cumprindo, assim, a primeira condição na definição de poliedro. O exemplo da **Figura** 26.2(b) não é poliedro, pois a interseção entre os polígonos $DBGF$ e IJL é o segmento IG, que não é lado nem vértice do poliedro, não cumprindo, assim, a segunda condição na definição de poliedro.

Teorema de Euler

Na aula 7 definimos polígonos convexos. A noção de convexidade para polígonos, que são figuras planas, estende-se para poliedros, que são figuras no espaço.

Definição 2

Um conjunto C do espaço é chamado convexo se, para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a C, o segmento AB está inteiramente contido em C.

Compare a definição acima com a de polígonos convexos da aula 7.

Definição 3

Um poliedro é chamado convexo se o seu interior for um conjunto convexo.

Voltando à **Figura** 26.1, vemos que o poliedro 26.1(a) é convexo, enquanto os poliedros 26.1(b) e 26.1(c) não são convexos. Todos os prismas e pirâmides são poliedros convexos.

O que faremos agora é contar o número de arestas, de vértices e de faces de alguns poliedros convexos. Para facilitar essa tarefa, usaremos as letras V, A e F para designar, respectivamente, o número de vértices, de arestas e de faces de um poliedro.

Consideremos, primeiramente, os prismas. Se cada base do prisma tiver n lados, então $V = 2n$, $A = 3n$ e $F = n + 2$ e, assim,

$$V - A + F = 2n - 3n + n + 2 = 2.$$

Consideremos, agora, as pirâmides. Se o números de lados da base da pirâmide for n, então $V = n+1$, $A = 2n$ e $F = n + 1$, de onde se obtém que

$$V - A + F = n + 1 - 2n + n + 1 = 2.$$

Para o poliedro da **Figura 26.1**(a), temos $V = 6$, $A = 12$ e $F = 8$ e, portanto, $V - A + F = 2$. Na verdade, para todo poliedro convexo, vale a relação $V - A + F = 2$. Essa relação foi descoberta por Euler:

Teorema de Euler

Para todo poliedro convexo tem-se que $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A, o número de arestas e F, o número de faces do poliedro.

A fórmula de Euler $V - A + F = 2$, válida para poliedros convexos, apareceu pela primeira vez em uma carta para Goldback em 1750. Existem várias provas para a fórmula. Na realidade, ela é válida para uma classe maior de poliedros: para saber se a fórmula vale para um determinado poliedro, imagine que ele seja feito de borracha. Se ao inflá-lo ele assumir a forma de uma esfera, então a fórmula de Euler é valida. Note que o poliedro da **Figura 26.1** b) não é convexo, mas satisfaz essa condição.

A beleza do teorema acima está na simplicidade de seu enunciado. É claro que é muito fácil determinar $V - A + F$ para qualquer poliedro que nos for dado, mas não podemos esquecer que existem infinitos deles. Lembre-se de que uma regra só é aceita em Matemática se pudermos prová-la usando apenas o raciocínio lógico e os resultados já estabelecidos.

Não faremos aqui uma prova do teorema de Euler. Ao leitor interessado, recomendamos *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 2, pág. 235. Lá se encontra uma prova que é praticamente a que foi publicada na *Revista do Professor de Matemática*, número 3, 1983, pelo professor Zoroastro Azambuja Filho.

O número $V - A + F$ é chamado característica de Euler , e, para poliedros como os que estamos estudando, vale a seguinte fórmula: $V - A + F = 2 - 2G$, sendo G o número de "túneis" do poliedro (chamado gênero do poliedro). Para entender melhor o que queremos dizer com "túneis", observe a figura 3 de um poliedro com um "túnel" (gênero 1).

Para poliedros não convexos, a relação de Euler pode valer ou não. Para o poliedro da **Figura 26.1**(b), por exemplo, tem-se $V = 14$, $A = 21$ e $F = 9$ e, portanto, $V - A + F = 2$. Para o poliedro da **Figura 26.1**(c), temos $V = 7$, $A = 12$ e $F = 8$ e, então, $V - A + F = 3$. Nesse caso, a relação de Euler não vale.

Um outro exemplo de poliedro para o qual não vale a relação de Euler está ilustrado na **Figura 26.3**.

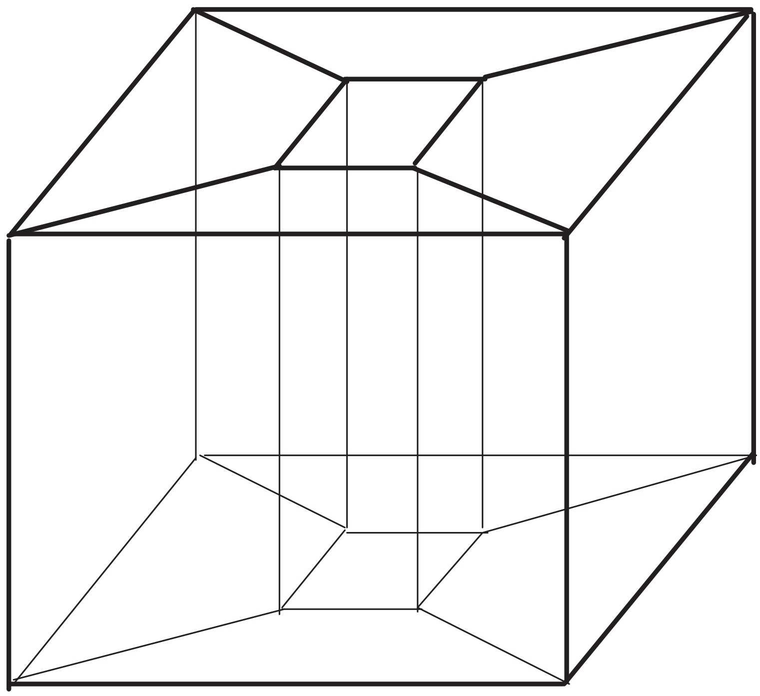

Figura 26.3: Poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

Para esse poliedro, tem-se $V = 16$, $A = 32$ e $F = 16$ e, portanto, $V - A + F = 0$.

Estudaremos, agora, um tipo especial de poliedro, chamado *poliedro regular*.

Poliedros regulares

Definição 4

Poliedro regular é um poliedro convexo em que as faces são polígonos regulares congruentes e que em todos os vértices concorrem com o mesmo número de arestas.

Como exemplos de poliedros regulares, temos o cubo (em que todas as faces são quadrados), o tetraedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros) e o octaedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros). Veja a **Figura** 26.4. O cubo também é chamado de hexaedro regular. Repare que o nome de alguns poliedros está relacionado ao número de faces, por exemplo: tetraedro - quatro faces, octaedro - oito faces, etc.

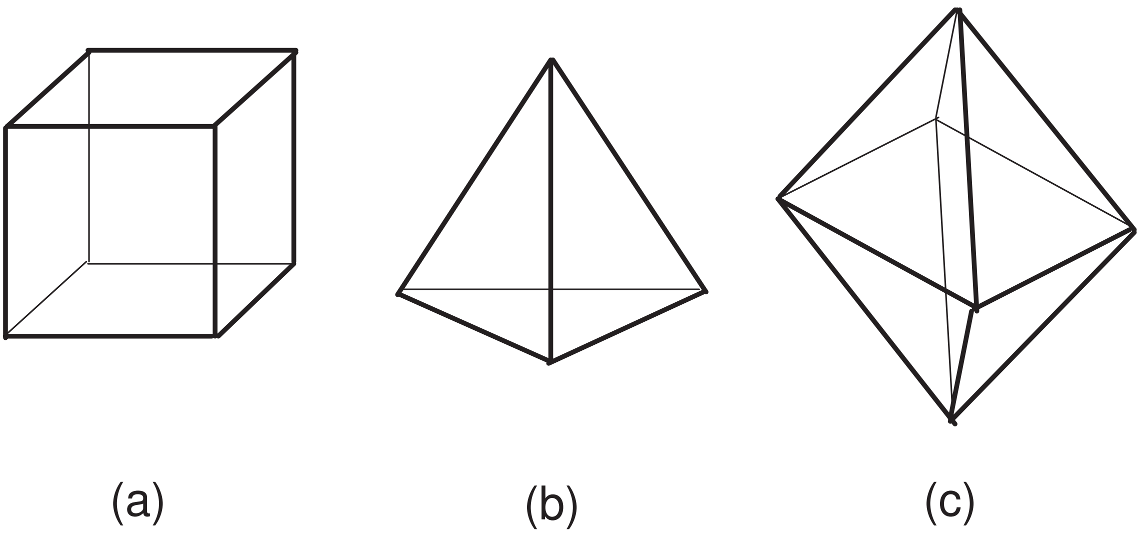

Figura 26.4: (a) Cubo, (b) tetraedro regular (c) octaedro regular.

Outros exemplos de poliedros regulares são o icosaedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros) e o dodecaedro regular (em que todas as faces são pentágonos regulares). Veja a **Figura** 26.5.

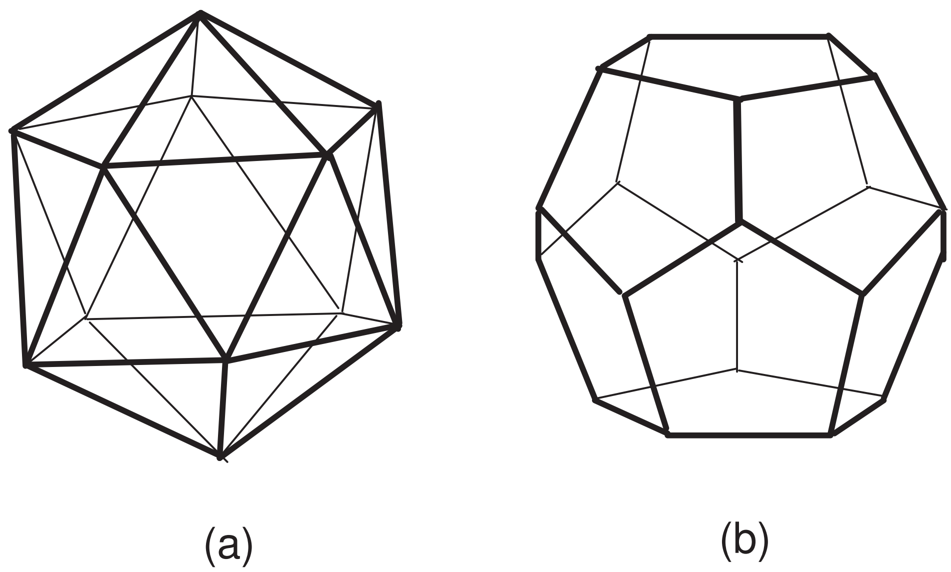

Figura 26.5: (a) Icosaedro, (b) dodecaedro.

O resultado a seguir diz que os exemplos das **Figuras** 26.4 e 26.5 são, na verdade, os únicos exemplos de poliedros regulares. Em sua demonstração, utilizaremos o teorema de Euler. Platão foi o primeiro matemático a provar que existem apenas cinco poliedros regulares.

Platão

427 a.C. - 347 d.C., Atenas, Grécia

Platão tem muitas contribuições na Filosofia e na Matemática. Contribuiu também para as artes: dança, música, poesia, arquitetura e drama. Ele discutiu questões filosóficas, tais como, ética, metafísica, onde tratou de imortalidade, homem, mente e realismo.

Na Matemática, seu nome está associado aos sólidos platônicos: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro e dodecaedro.

O dodecaedro era o modelo de Platão para o universo.

Consulte:

`http://www-groups.dcs.st-nd.ac.uk/~history/Mathematicians/platao.html`

Teorema. Existem apenas cinco poliedros regulares.

Demonstração.

Seja P um poliedro regular e seja p o número de lados de cada uma de suas faces. Seja q o número de arestas que concorrem em cada vértice de P (observamos que devemos ter $p \geq 3$ e $q \geq 3$). Se multiplicarmos o número de vértices de P por q, obteremos o dobro do número de arestas, pois cada aresta concorre em exatamente dois vértices. Assim,

$$\text{(I)} \qquad 2A = qV$$

Se multiplicarmos o número de faces de P por p, obteremos o dobro do número de arestas, pois cada aresta é lado de exatamente duas faces. Assim,

(II) $$2A = pF$$

Substituindo (I) e (II) na relação de Euler $V - A + F = 2$, obtemos

(III) $$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2$$

de onde se conclui que

(IV) $$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} > \frac{1}{2}$$

A desigualdade anterior implica que não podemos ter simultaneamente $p > 3$ e $q > 3$ (verifique isso!). Se $p = 3$, segue de (IV) que

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

de onde se conclui que $q < 6$. Logo, se $p = 3$, devemos ter $q = 3, 4$ ou 5. Da mesma forma, se $q = 3$, prova-se que devemos ter $p = 3, 4$ ou 5. Portanto, as possibilidades são:

- $p = 3$ e $q = 3$
- $p = 3$ e $q = 4$
- $p = 3$ e $q = 5$
- $p = 4$ e $q = 3$
- $p = 5$ e $q = 3$

Para determinar os poliedros possíveis, calcularemos o número de faces em cada possibilidade. Usando as equações (II) e (III), obtemos facilmente que

$$F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

Então,

- $p = 3$ e $q = 3 \Rightarrow F = 4$ (tetraedro regular)
- $p = 3$ e $q = 4 \Rightarrow F = 8$ (octaedro regular)
- $p = 3$ e $q = 5 \Rightarrow F = 20$ (icosaedro regular)
- $p = 4$ e $q = 3 \Rightarrow F = 6$ (hexaedro regular ou cubo)
- $p = 5$ e $q = 3 \Rightarrow F = 12$ (dodecaedro regular)

Q.E.D.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O que são poliedros.
- O teorema de Euler.
- O que são poliedros regulares.
- Que existem apenas cinco poliedros regulares.

Exercícios

1. Construa dois exemplos de poliedros não convexos para os quais vale a relação de Euler.

2. Construa um exemplo de poliedro em que $V - A + F = -2$.

3. Você seria capaz de obter poliedros para os quais $V - A + F = -4, -6, -8, \ldots$?

4. Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.

5. É possível construir um poliedro de doze faces com sete faces triangulares e cinco faces quadrangulares? Justifique!

6. Um poliedro convexo de 11 vértices possui faces triangulares, quadrangulares e uma face pentagonal. Se o número de faces triangulares é igual ao número de faces quadrangulares, determine o número de faces do poliedro.

7. Um poliedro possui seis faces triangulares, cinco quadrangulares, quatro pentagonais e duas hexagonais. Determine o número de arestas desse poliedro.

8. Prove que para todo poliedro valem as desigualdades

$2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$, onde V, A e F denotam, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro.

9. Prove que em todo poliedro convexo valem as desigualdades $3F \geq A + 6$ e $3V \geq A + 6$.

10. Um poliedro convexo possui seis faces triangulares, cinco quadrangulares, quatro pentagonais e duas hexagonais. Determine a soma dos ângulos internos de todas as faces desse poliedro.

11. Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo é dada por $S = 360(A - F)$.

    Sugestão: Numere as faces de 1 até F e denote por n_1 o número de lados da primeira face, por n_2 o número de lados da segunda face, e assim por diante. Use a fórmula que determina a soma dos ângulos internos de um polígono convexo para mostrar que

    $$S = 180(n_1 - 2) + 180(n_2 - 2) + \ldots + 180(n_F - 2).$$

    Agora, observe que $n_1 + n_2 + \ldots + n_F = 2A$, pois cada aresta é lado de exatamente duas faces.

12. (U.MACK-1981) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de qua-

tro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é:

a) 75 b) 53 c) 31 d) 45 e) 25

13. (CESGRANRIO-1984) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais. O número de vértices do poliedro é:

    a) 80 b) 60 c) 50 d) 48 e) 36

14. Diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

15. (ESCOLA NAVAL-1988) Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é:

    a) 60 b) 81 c) 100 d) 121 e) 141

16. Dê um exemplo de um poliedro convexo com dez arestas.

17. Determine o número de vértices e o número de faces de um poliedro convexo com dez arestas.

18. Descreva um procedimento que leve à construção de um tetraedro regular. Justifique.

19. Descreva um procedimento que leve à construção de um octaedro regular. Justifique.