Aula 25 – A esfera

Objetivos

- Identificar a esfera e seus elementos.
- Estudar posições relativas entre esferas e entre planos e esferas.

Introdução

Sejam O um ponto e r um número real positivo. Chamamos de esfera de centro O e raio r ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é r (veja a **Figura** 25.1).

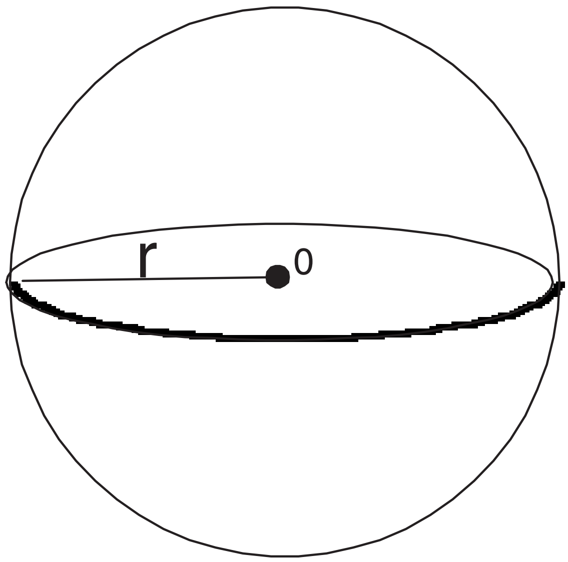

Figura 25.1: Esfera de centro O e raio r.

Também chamamos *raio* a todo segmento ligando O a um ponto da *esfera*. Se A e B são pontos da esfera tais que o segmento AB contém O, dizemos que AB é um *diâmetro* e que A e B são diametralmente opostos. A região limitada pela esfera é o conjunto de pontos cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r.

Seções planas de uma esfera

Considere a interseção de uma esfera de centro O e raio r com um plano α cuja distância ao centro da esfera seja um número d menor que r e considere um ponto A nessa interseção. O plano α é dito *secante* à esfera.

Seja O' o pé da perpendicular ao plano α traçada a partir de O e trace os segmentos OO', OA e $O'A$ (veja a **Figura** 25.2). Como $\overleftrightarrow{OO'}$ é perpendicular a α e $O'A \subset \alpha$, tem-se que o triângulo $OO'A$ é retângulo de hipotenusa OA.

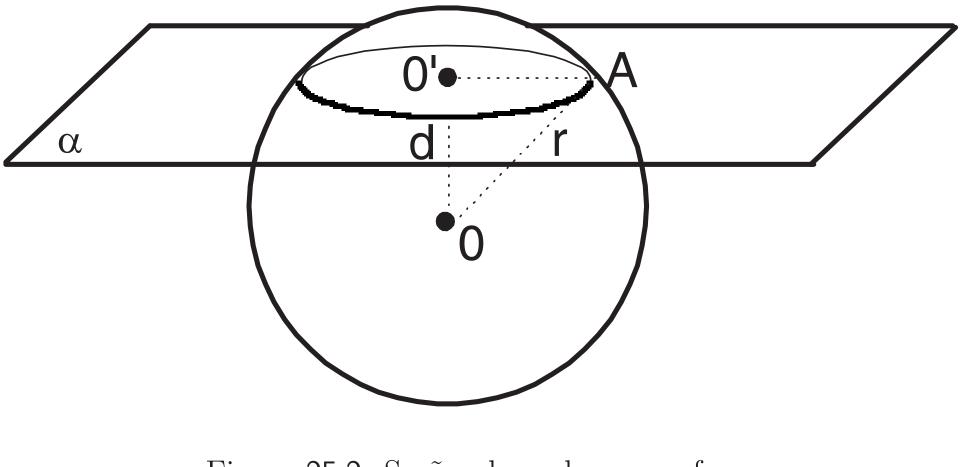

Figura 25.2: Seção plana de uma esfera.

Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$r^2 = m(OA)^2 = m(OO')^2 + m(O'A)^2 = d^2 + m(O'A)^2,$$

o que implica que

$$m(O'A) = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Assim, a distância ao ponto O' de todo ponto da interseção entre α e a esfera vale $\sqrt{r^2 - d^2}$, o que mostra que essa interseção é o círculo contido em α, de centro O' e raio $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$. Quanto menor for d, maior será o valor de r'. Se $d = 0$, ou seja, se o plano α passar pela origem, tem-se $r' = r$, o que significa que a interseção da esfera com um plano que passa pelo centro é um círculo de mesmo raio que a esfera. Chamamos tal círculo de *círculo máximo*. Na **Figura 25.3**, a interseção de α com a esfera é um círculo máximo.

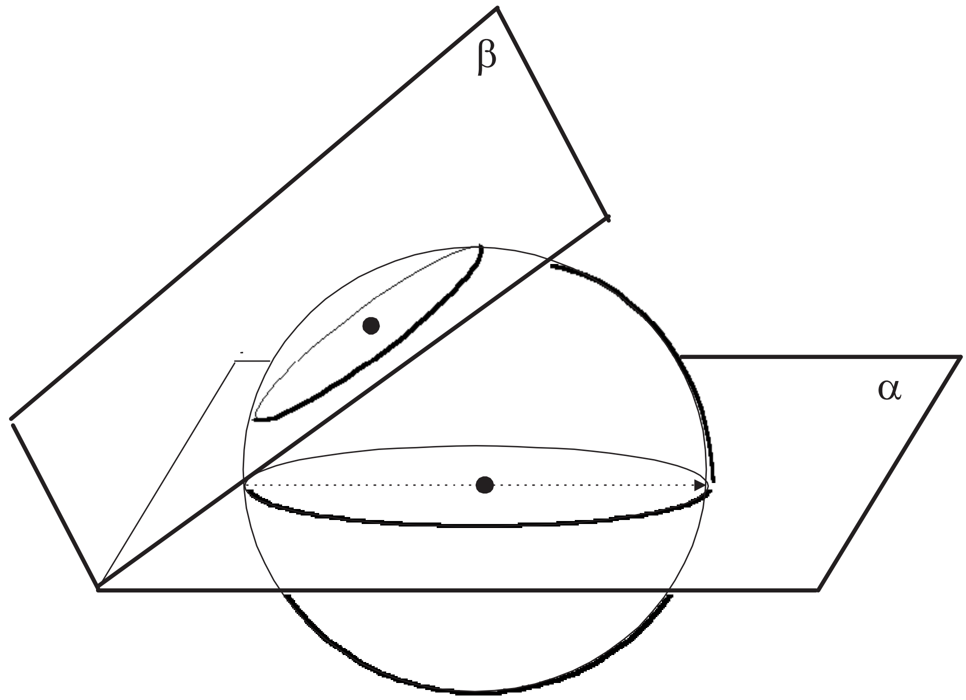

Figura 25.3: Seções de uma esfera.

Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 1

A interseção de um plano com uma esfera é um círculo cujo centro é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da esfera. Se dois planos equidistam do centro da esfera, as seções planas que eles determinam são círculos de mesmo raio.

Se A e B são pontos diametralmente opostos de uma esfera, B é o ponto da esfera mais distante de A, ou seja, para qualquer outro ponto C tem-se $m(AB) > m(AC)$.

Para ver isso, basta observar que o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa AB (veja **Figura** 25.4).

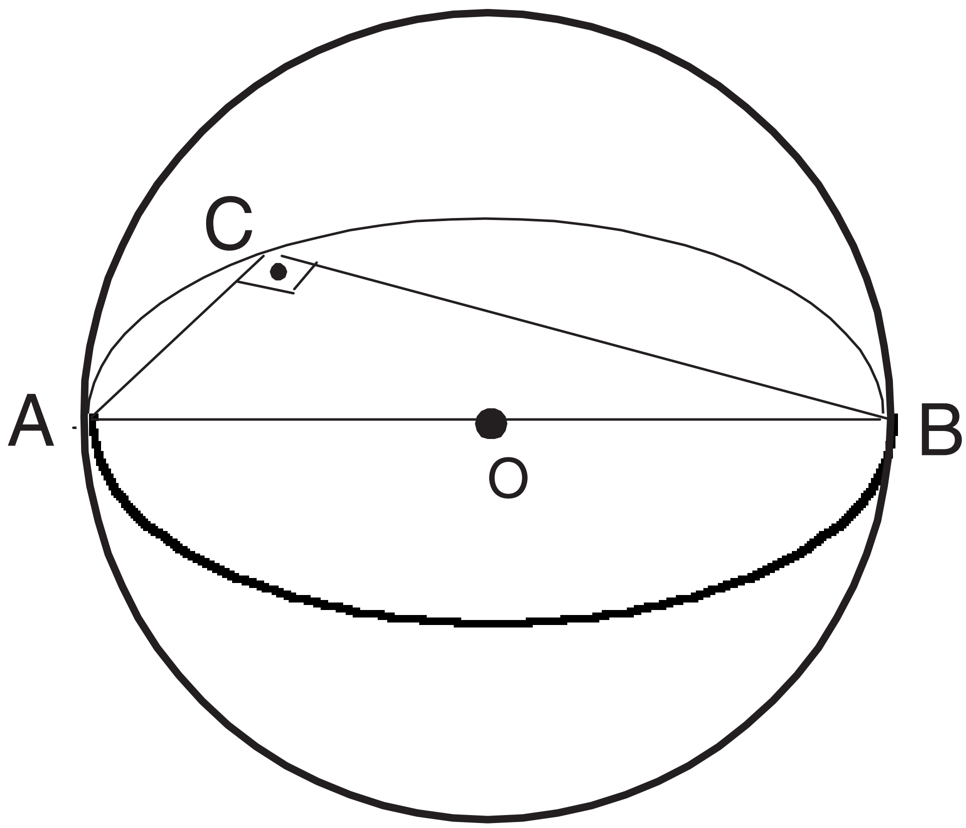

Figura 25.4: B é o ponto mais distante de A.

Vimos anteriormente que, se um plano secciona uma esfera, ele o faz segundo um círculo. Veremos agora uma outra possibilidade. Considere uma esfera de centro O e raio r e tome um ponto A sobre ela. Chame de α o plano que passa por A e é perpendicular a OA (veja **Figura** 25.5).

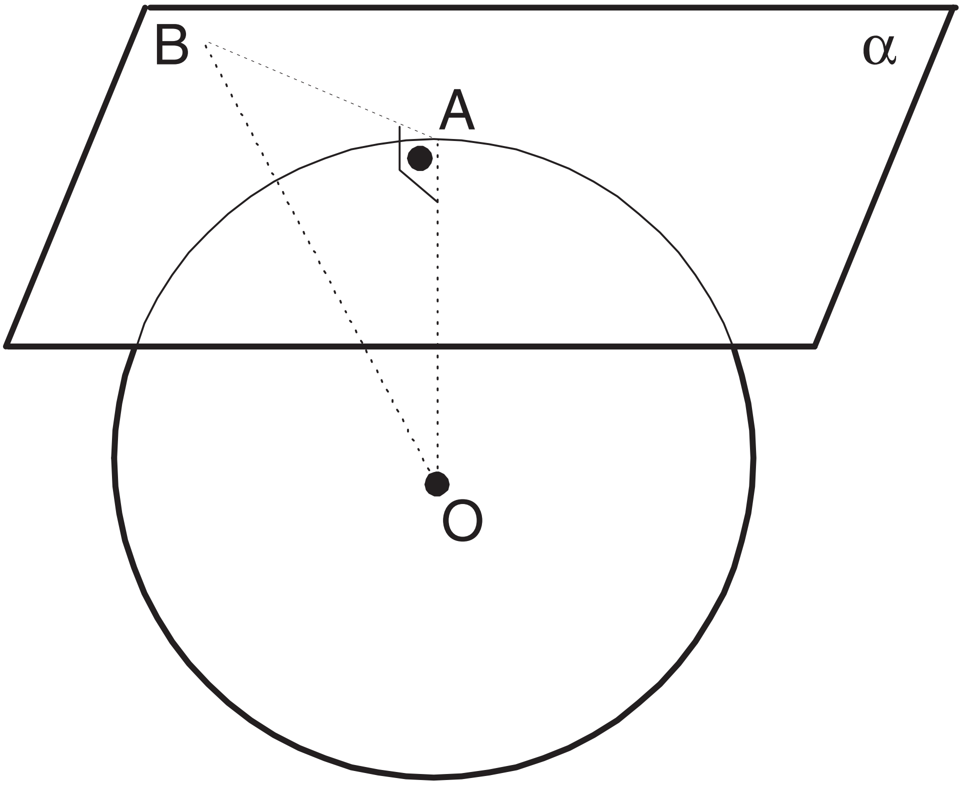

Figura 25.5: $OA \perp \alpha$.

Para todo ponto $B \neq A$ e pertencente a α, tem-se que $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, pois $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a α. Logo, o triângulo OAB é retângulo com ângulo reto em A e, portanto, $m(OB) > m(OA) = r$. Assim, qualquer ponto de α diferente do ponto A está fora da esfera. Conseqüentemente, A é o único ponto na interseção de α com a esfera. Quando ocorre de um plano intersectar uma esfera em apenas um ponto, dizemos que esse plano é *tangente* à esfera.

Provamos, então, a seguinte proposição:

Proposição 2

Se um plano é perpendicular a um raio de uma esfera em sua extremidade, então ele é tangente à esfera.

Analogamente ao que ocorre na tangência entre uma reta e um círculo, a recíproca da proposição anterior é também verdadeira:

Proposição 3

Se um plano é tangente a uma esfera, então ele é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência.

Deixaremos a prova da proposição anterior como exercício (veja o exercício 6 desta aula).

Há uma terceira possibilidade para a posição relativa entre uma esfera e um plano. Se a distância entre o centro da esfera e o plano for maior que o raio da esfera, então eles não se intersectam, e o plano é chamado de *exterior*. Veja na **Figura** 25.6 as posições relativas entre um plano e uma esfera.

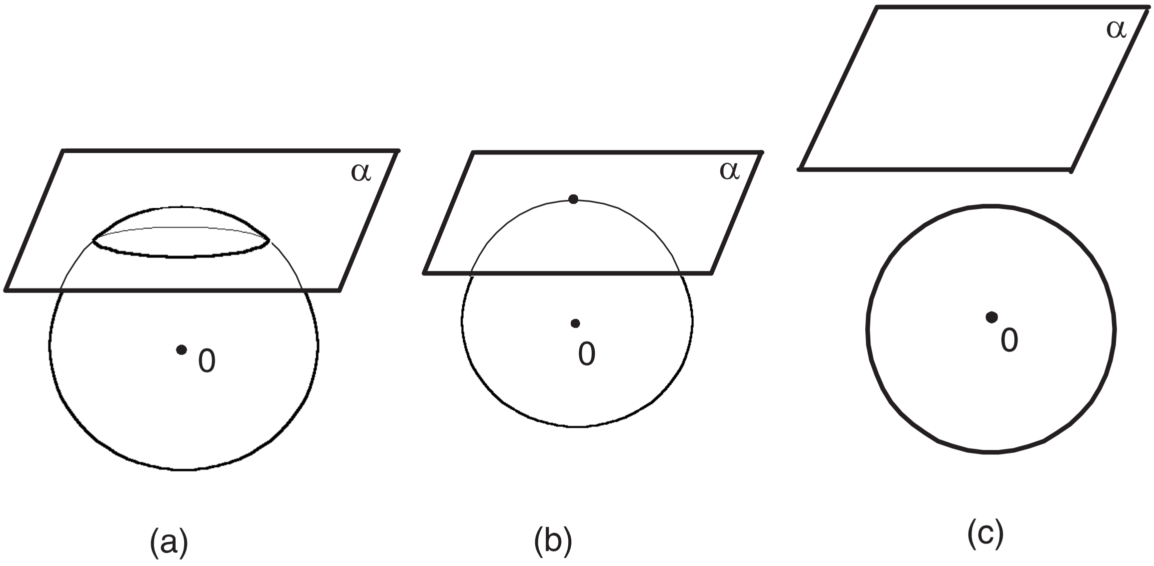

Figura 25.6: a Posições relativas entre um plano e uma esfera: (a) plano secante, (b) plano tangente e (c) plano exterior.

Posições relativas entre esferas

As posições relativas entre duas esferas são bastante parecidas com as posições relativas entre dois círculos. Duas esferas são ditas *disjuntas* quando não têm nenhum ponto em comum. Quanto possuem exatamente um ponto em comum, elas são chamadas *tangentes*. Quando elas se intersectam em mais de um ponto, são chamadas *secantes*. No caso de esferas tangentes, pode-se mostrar (veja exercício 11) que a reta que liga os seus centros contém o ponto de interseção (chamado *ponto de tangência*). Na **Figura 25.7**, temos exemplos de esferas disjuntas ((a) e (b)), tangentes interiormente ((c)), tangentes exteriormente ((d)) e secantes ((e)).

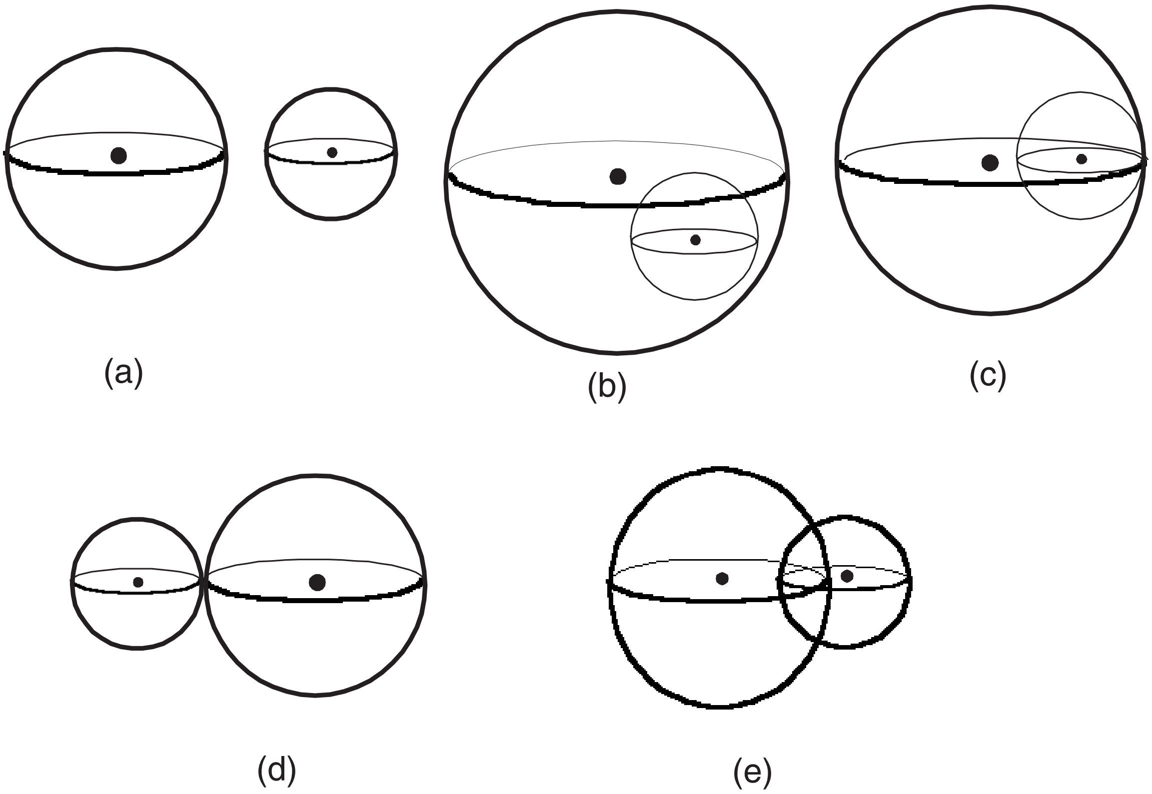

Figura 25.7: Posições relativas entre duas esferas.

Vamos determinar, agora, a interseção entre esferas secantes (**Figura 25.7** (e)). Para isso, considere duas esferas S_1 e S_2, centradas em O_1 e O_2, respectivamente, e seja A um ponto nessa interseção. Chame de α o plano passando por A e perpendicular à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ e seja $O = \alpha \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$. Vamos estudar o caso em que O pertence ao interior do segmento O_1O_2 (**Figura** 25.8). O estudo dos outros casos é análogo, e será deixado como exercício.

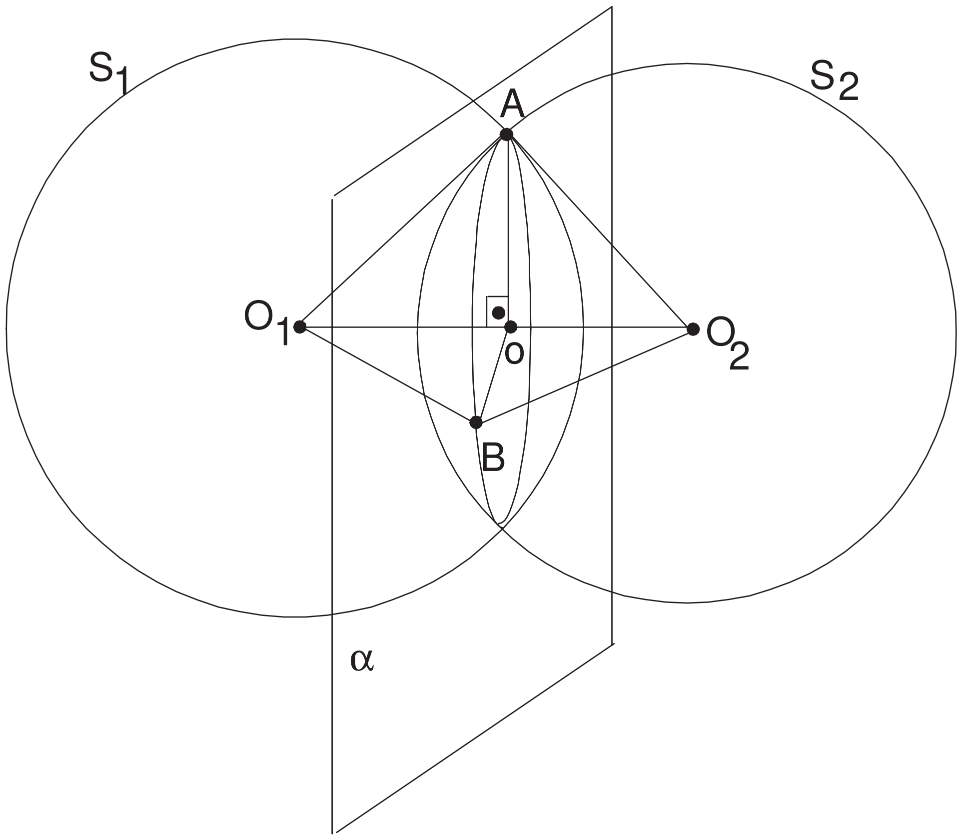

Figura 25.8: Esferas secantes.

Vamos mostrar inicialmente que $S_1 \cap S_2$ está contido em α. Com esse objetivo, considere qualquer outro ponto B pertencente a $S_1 \cap S_2$, e trace os segmentos O_1B, O_2B, O_1A, O_2A, OB e OA. Temos $O_1A \equiv O_1B$ (pois A e B pertencem a S_1) e $O_2A \equiv O_2B$(pois A e B pertencem a S_2). Como O_1O_2 é comum aos triângulos O_1AO_2 e O_1BO_2, segue de L.L.L. que $O_1AO_2 \equiv O_1BO_2$. Em conseqüência, $A\widehat{O_1}O_2 \equiv B\widehat{O_1}O_2$. Agora compare os triângulos AO_1O e BO_1O. Temos $O_1A \equiv O_1B$ e $A\widehat{O_1}O \equiv B\widehat{O_1}O$ (provado anteriormente). Como O_1O é comum, segue de L.A.L. que $AO_1O \equiv BO_1O$. Conseqüentemente, $A\widehat{O}O_1 \equiv B\widehat{O}O_1$ e $OB \equiv OA$. Como $A\widehat{O}O_1$ é reto, pois $OA \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{O_1O} \perp \alpha$, obtemos que $B\widehat{O}O_1$ é reto e, portanto, $B \in \alpha$. Como $OB \equiv OA$, tem-se que B pertence à esfera de centro O e raio OA.

Concluímos que $S_1 \cap S_2$ está contido em α e na esfera de centro O e raio OA. Como já sabemos que a interseção entre um plano e uma esfera é um círculo, segue que $S_1 \cap S_2$ está contido no círculo de centro O e raio OA contido no plano α. Deixamos como exercício a prova de que todo ponto desse círculo pertence a $S_1 \cap S_2$. Está provada a seguinte proposição:

Proposição 4

A interseção entre duas esferas secantes é um círculo. O centro desse círculo pertence à reta que contém os centros das esferas.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A definição de esfera.
- Que as seções planas de uma esfera são círculos.
- Que a interseção entre duas esferas secantes é um círculo.

Exercícios

1. Um plano, distando $12\,cm$ do centro de uma esfera, secciona essa esfera, segundo um círculo de raio igual a $5\,cm$. Determine o raio da esfera.

2. Duas esferas se cortam segundo um círculo de raio r. Se os raios das esferas valem R_1 e R_2, determine a distância entre os centros das esferas.

3. Uma esfera de raio r é seccionada por um plano α de modo que a seção plana determinada tem área igual à metade da área da seção plana determinada por um plano que passa pelo centro da esfera. Determine a distância do centro da esfera ao plano α.

4. Os raios de duas esferas concêntricas valem $29\,cm$ e $21\,cm$. Calcule a área da seção feita na esfera maior por um plano tangente à esfera menor.

5. Considere uma esfera de raio r e um ponto P distando $2r$ do centro da esfera. Determine o conjunto dos pontos da esfera cuja distância a P é igual a $2r$.

6. Se um plano é tangente a uma esfera, prove que ele é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência.

7. Um cone reto com raio da base medindo $6\,cm$ está contido em uma esfera de $8\,cm$ de raio. Determine a maior altura que o cone pode ter.

8. Determine o raio da maior esfera que cabe dentro de um cone reto de altura $12\,cm$ e raio da base igual a $5\,cm$.

9. Dados dois pontos distintos A e B, prove que é uma esfera o conjunto dos pés das perpendiculares traçadas de A aos planos que passam por B.

10. (FUVEST-2001) No jogo de bocha, disputado em um terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor de raio 4. Em um lançamente, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas. A distância entre os pontos A e B em que as bolas tocam o chão é:

    a) 8 b) $6\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

11. Sejam S_1 e S_2 duas esferas tangentes (interior ou exteriormente) em um ponto T. Se O_1 e O_2 são os centros de S_1 e S_2, respectivamente, prove que O_1, O_2 e T são colineares. Conclua que o plano tangente a S_1 em T coincide com o plano tangente a S_2 em T.

12. Sejam α um plano e r uma reta perpendicular a α. Seja $Q = r \cap \alpha$ e tome um ponto $P \neq Q$ em r. Prove que um ponto A pertence a α se e somente se o ângulo $P\widehat{Q}A$ é reto.

13. (UFF-1994) Considere duas retas perpendiculars r e s e um segmento de reta MN contido em r. Pode-se afirmar, quanto à existência de esferas de centros na reta s que passam por M e N que:

    a) existem duas únicas.

    b) existem no máximo três.

    c) existe uma infinidade.

    d) não existe nenhuma.

    e) se existir uma, existirá uma infinidade.