Aula 32

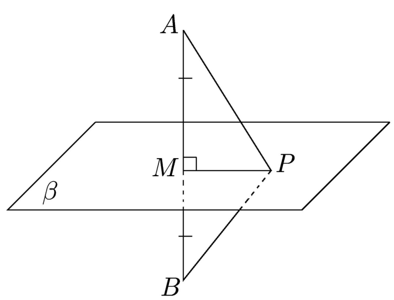
1. Considere o paralelogramo $ABCD$ e seja O a interseção das diagonais. Se o paralelogramo é inscritível então $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$. Então $ABCD$ é retângulo.

2. Seja $ABCD$ o paralelogramo circunscritível. Seja O a interseção das diagonais $d(O, \overline{AB}) = d(O, \overline{AC}) = d(O, BC) = d(O, CD)$ e $\overline{OA} \perp OB$, $\overline{OA} \perp OD$, $\overline{OA} \parallel OB$. Logo, $ABCD$ é losango.

3. Todas as faces têm a mesma área que é igual a $\sqrt{2}$.

4. Observe que a altura do paralelepípedo em relação a qualquer face é a mesma e igual a 1.

5.

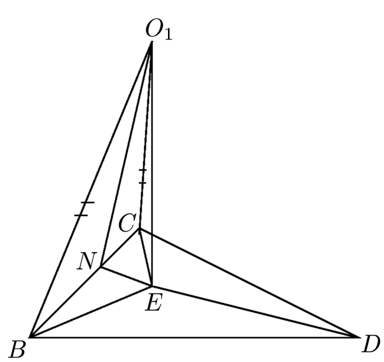


Seja M o ponto médio de AB e seja P um ponto qualquer de β. Se $P = M$, não há nada a se provar. Se $P \neq M$, trace PA e PB e compare os triângulos PA e PB.

Tem-se que $AM \equiv MB$ (pois M é o ponto médio de AB), $A\widehat{M}B \equiv B\widehat{M}P$ (pois $\overleftrightarrow{AM} \perp \beta$ e $\overleftrightarrow{MP} \subset \beta$) e MP é comum. Por LAL tem-se que $AMP \equiv BMP$. Em particular, $AB \equiv BP$.

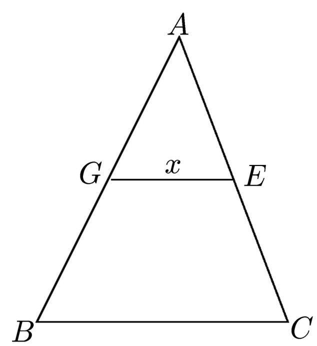
6. Sejam S_1 e S_2 esferas de centro O_1 e O_2, respectivamente, ambas passando por quatro pontos não-colineares A, B, C e D. Como $O_1A \equiv O_1B$, tem-se por LLL que $O_1AM \equiv O_1BM$, onde M é o ponto médio de AB. Em particular, $O_1\widehat{M}A \equiv O_1\widehat{M}B$, ou seja, $O_1\widehat{M}A$ é reto e, portanto, $\overleftrightarrow{MO_1}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Chamando de β o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por M, tem-se então que $\overleftrightarrow{MO_1} \subset \beta$. Da mesma forma, prova-se que $\overleftrightarrow{MO_2} \subset \beta$.

Mostraremos, agora, que O_1 pertence à reta r que passa pelo circuncentro E de BCD e que é perpendicular ao plano de BCD.



Se N é o ponto médio de BC, tem-se que $\overleftrightarrow{O_1N} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EN} \perp \overleftrightarrow{BC}$, pois O_1BC e EBC são isósceles de base BC. Logo, $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano que contém O_1, N e E. Como $\overleftrightarrow{O_1E}$ está contida nesse plano, segue que $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{O_1E}$. Da mesma forma, trabalhando com o ponto médio de BD, prova-se que $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{O_1E}$. Como $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, conclui-se que $\overleftrightarrow{O_1E}$ é perpendicular ao plano de B, C e D. Logo, $r = \overleftrightarrow{O_1E}$ e, assim, está provado que $O_1 \in r$. Da mesma forma, prova-se que $O_2 \in r$. Como já provamos que O_1 e O_2 pertencem a β e r e β são concorrentes, conclui-se que $O_1 = O_2$. Isso basta para concluir que S_1 e S_2.

7. Observe a face do tetraedro



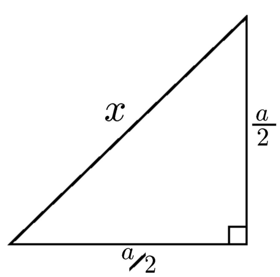
G e E são os pontos médios dos lados AB e AC do $\triangle ABC$.

Logo, $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{x}{BC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{a} \;\therefore\; x = \frac{a}{2}$$

Aresta do octaedro: $\dfrac{a}{2}$; onde a é aresta do tetraedro.

8. Observe



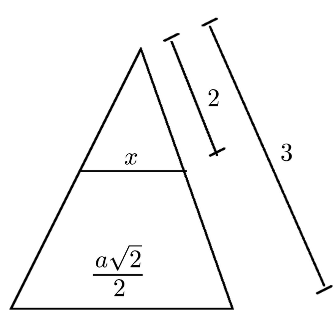
$a \Rightarrow$ aresta do cubo

$x \Rightarrow$ aresta do octaedro

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \;\therefore\; x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Aresta do octaedro: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

9.



$a \Rightarrow$ aresta do octaedro

$x \Rightarrow$ aresta do cubo

Os centros das faces do octaedro são baricentros dessas faces, então

$$x = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Aresta do cubo: $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

10. Em um cilindro de raio da base r e altura h inscrito em uma esfera de raio R, vale a relação:

$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2$$

Logo, o cilindro é reto.

11. $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

12. Sim, pois vale a relação: $h = 2r$, onde $R = r$

$r \Rightarrow$ raio do cilindro

$h \Rightarrow$ altura do cilindro

$R \Rightarrow$ Raio da esfera

13. Pela questão 12, o cilindro é equilátero e $R = r$.

14. $R + \sqrt{R^2 - r^2}$

15. (Desafio!)

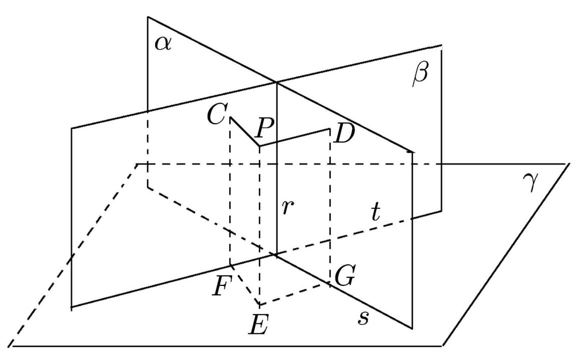
Sim

16. $\dfrac{r}{h}(\sqrt{r^2 + h^2} - r)$

17. $3\pi R^3$

18. $12\sqrt{10}\pi$ cm^2

19.



Tome um ponto $B \notin \gamma$ e sejam C, D e E os pés das perpendiculares traçadas de P aos planos β, α e γ, respectivamente. Como $\overleftrightarrow{PC} \perp \beta$ e $\beta \perp \gamma$, tem-se que $\overleftrightarrow{PC}$ é paralela a γ. Da mesma forma, tem-se que $\overleftrightarrow{PD}$ é paralela a γ. Segue que existem retas u e v contidas em γ, passando por E, tais que $u \parallel \overleftrightarrow{PC}$ e $v \parallel \overleftrightarrow{PD}$. Sejam $F = u \cap t$ e $G = v \cap s$. Como $\overleftrightarrow{PC} \perp \beta$ e $\overleftrightarrow{PC} \parallel \overleftrightarrow{FE}$, tem-se que $\overleftrightarrow{FE} \perp \beta$, o que implica que $t \perp \overleftrightarrow{FE}$. Além disso, como $\overleftrightarrow{PE} \perp \gamma$ e $t \subset \gamma$, tem-se $t \perp \overleftrightarrow{FE}$. Segue que $t \perp \delta$, onde δ é o plano que contém $\overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{FE}$. Como $\delta \supset \overleftrightarrow{CF}$, obtemos que $t \perp \overleftrightarrow{CF}$. Mas $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{FE}$, pois $\overleftrightarrow{FE} \perp \beta$ e $\beta \supset \overleftrightarrow{CF}$. Logo, $\overleftrightarrow{CF} \perp \gamma$. Como $\overleftrightarrow{PE} \perp \gamma$, conclui-se que $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{PE}$ e, portanto, que $PCFE$ é um paralelogramo. Da mesma forma, prova-se que $PDGE$ é um paralelogramo. Segue que $PC \equiv EF$ e $PD \equiv EG$, ou seja, as distâncias de P aos planos β e α são iguais às distâncias de E às retas t e s. Logo,

$$\begin{aligned} d(P,\beta) = d(P,\alpha) &\iff d(E,t) = d(E,s) \\ &\iff E \in u_1 \cup u_2 \\ &\iff E \in \pi_1 \cup \pi_2 \\ &\iff P \in \pi_1 \cup \pi_2 \end{aligned}$$