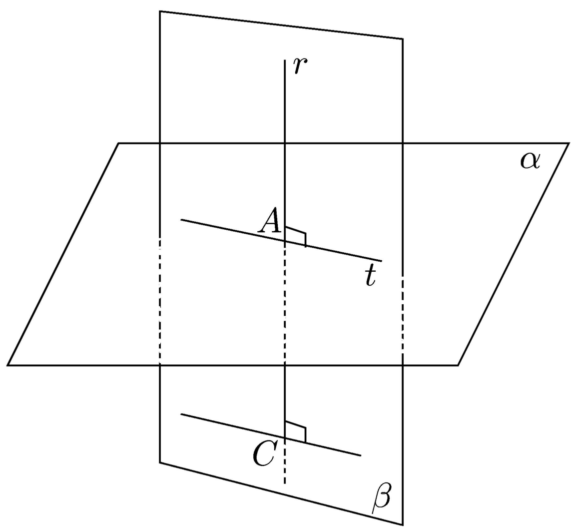
Aula 20

1. - Falsa
   - Falsa
   - Verdadeira
   - Falsa
   - Falsa
   - Verdadeira

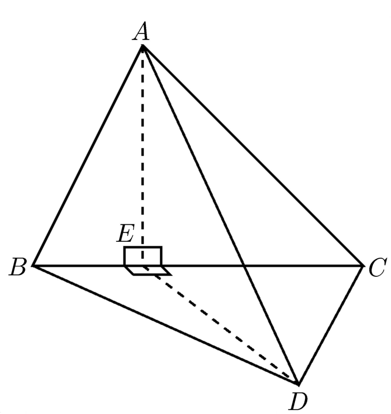
2.



Seja β o plano que contém r e s. Seja $A = r \cap \alpha$ temos que $A \in \beta (A \in t)$.

Temos então que $A \in \beta$ e $A \in \alpha$. Logo β intersecta α em uma reta $t \in \alpha \Rightarrow \perp t$ (pois $r \perp \alpha$). Daí, como $t \in \beta$ então $t \parallel s$ (os ângulos alternos internos são iguais). Se s intersecta r em A, então $s = t$ (pois existe apenas uma reta perpendicular a t passando por A). Então $s \subset \alpha$. Se s intersecta r em $C \neq A$ então s é paralela a α (prop 5).

3.



Trace as alturas dos triângulos ABC e DBC relativamente ao lado BC (estas se encontram no mesmo ponto E pois ABC e DBC são isósceles).

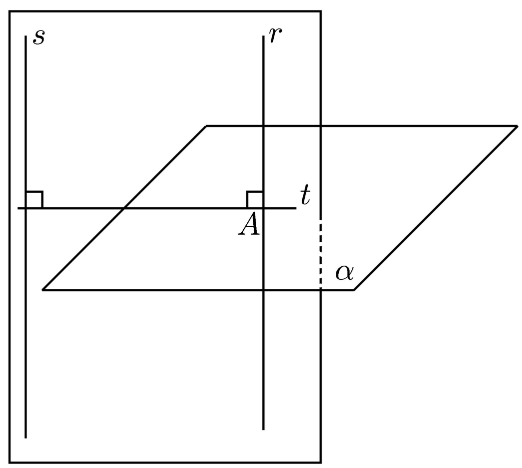
Seja α o plano que contém $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ ($\overleftrightarrow{AD} \in \alpha$ pois A e D pertencem a α). Como $\overleftrightarrow{BC} \perp \alpha$ (pois é perpendicular a $\overleftrightarrow{AE}$ e a $\overleftrightarrow{DE}$) temos que $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a todas as retas de α, em particular, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$.

4. Temos que $r \perp \alpha$ então $r \perp s$ (r é perpendicular a todas as retas de α).

Como $\overleftrightarrow{AC}$ também é perpendicular a s temos que s é perpendicular ao plano β que contém r e $\overleftrightarrow{AC}$.

Daí, s é perpendicular a todas as retas de β, em particular a reta t. (veja que $t \in \beta$ pois B e C estão em β)

5.



Como $r \parallel s$ existe β (um plano que contém r e s). Seja $A = r \cap \alpha$ então $A \in \alpha$ e $A \in \beta$ ($A \in \alpha \cap \beta$). Então a interseção de α e β é a reta t.

Como $t \in \alpha$ e $r \perp \alpha \Rightarrow r \perp t$.

Como $t \in \beta$ e $r \perp t$ e $r \parallel s \Rightarrow s \perp t$.

Logo, $s \perp \alpha$.

6. Como r corta α em A e $\alpha \parallel \beta$, então r corta β (em B). Seja γ o plano que contém r.

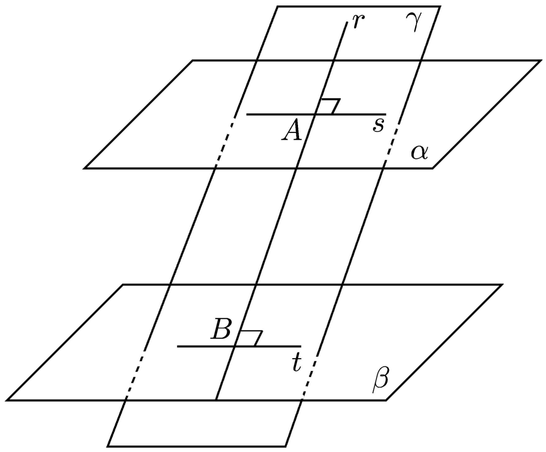
Como $A \in \alpha$ e $A \in \gamma \Rightarrow \alpha \cap \gamma = s$.

Como $B \in \beta$ e $B \in \gamma \Rightarrow \beta \cap \gamma = t$.

Temos que $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Daí, $s \cap t = \emptyset$.

Como s e t estão no mesmo plano γ temos que $s \parallel t$.

Daí, $r \perp t$ (alternos internos) e portanto $r \perp \beta$.



7. $\alpha \cap \gamma$ é uma reta.

• Se $A \in \alpha$ então os pés das perpendiculares são o ponto A, daí $A \in \alpha$ e $A \in \gamma$.

Logo $A \in \alpha \cap \gamma$. Então a interseção de α e r é uma reta.

• Se $A \notin \alpha$ então os pés das perpendiculares são distintos senão teríamos $r \equiv s$).

E daí, $\alpha \cap \gamma$ são dois pontos (os pés das perpendiculares).

Logo a interseção de α e γ é uma reta.

- Sendo $t = \alpha \cap \gamma$, provar que $r \perp t$ e $s \perp t$.

Temos que s e r são perpendiculares a todas as retas de α (pois são perpendiculares a α). Daí, $s \perp t$ e $r \perp t$.

- <u>JUSTIFICATIVA</u>: Dados uma reta r e um ponto P existe uma única reta perpendicular a r passando por P.

r e s' passam por P. Logo são concorrentes.

s é perpendicular a α, logo é perpendicular a todas as retas e α. Como $s' \parallel s$ então s' é perpendicular a todas as retas de α. Então $s' \perp \alpha$.

8. - $a = \gamma \cap \alpha$ e $b = \gamma \cap \beta$ são retas concorrentes.

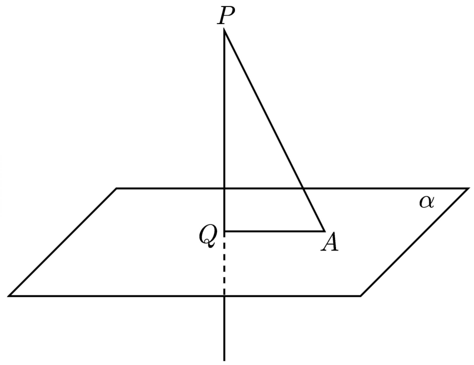
Em qualquer uma das possibilidades a e b intersecta t no mesmo ponto P. Logo são concorrentes.

- $\gamma \perp a$ e $r \perp b$.

$r \perp \alpha$ e $r \perp \beta \Rightarrow r$ é perpendicular a todas as retas de α e β, em paticular a, a e b.

- Contradição: No plano γ, dados uma reta t e um ponto P existe uma única reta perpendicular a r passando por P.

9.

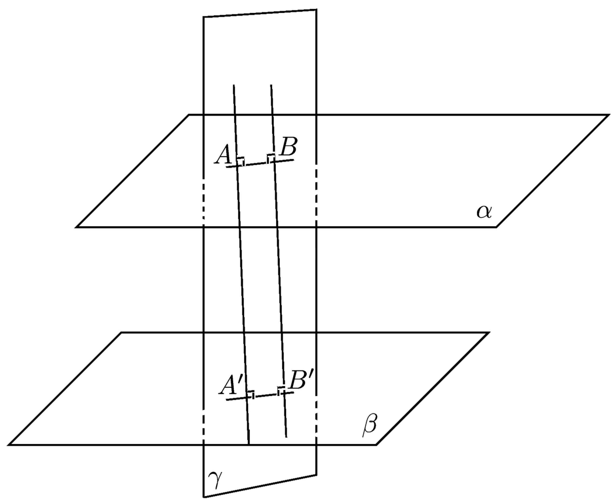


Seja β o plano que contém $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{PA}$ (e $\overleftrightarrow{QA}$, pois $Q, A \in \beta$)

Formamos assim um triângulo retângulo com hipotenusa $= PA$.

Daí $m(PA) > m(PQ)$, por resultado anterior.

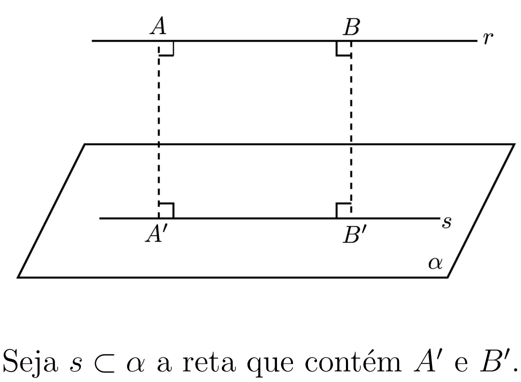
10.



Seja γ o plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$. Pela proposição 18, temos que r e s são perpendiculares a α (pois são perpendiculares a α e $\alpha \parallel \beta$).

Daí $ABB'A'$ é um paralelogramo. Logo, $AA' = BB'$.

11.

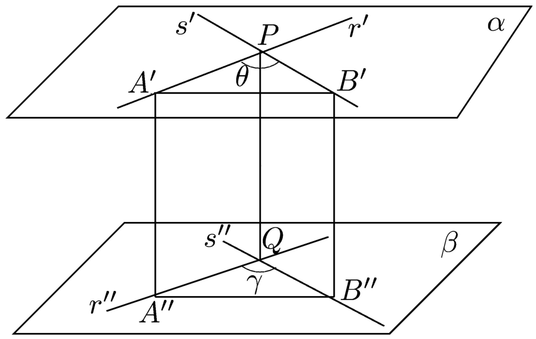


$r \parallel s$

Seja $s \subset \alpha$ a reta que contém A' e B'.

O quadrilátero $ABB'A'$ é um retângulo, logo, $m(AA') = m(BB')$.

12.



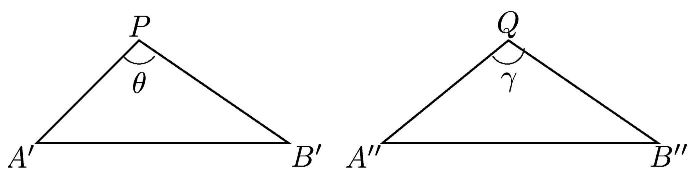
Se $r',\ r'',\ s',\ s''$ não são coplanares

$$\left.\begin{array}{l} r' \parallel r \text{ e } s' \parallel s \\ r'' \parallel r \text{ e } s'' \parallel s \end{array}\right\} r' \parallel r'' \text{ e } s' \parallel s''.$$

Então $\alpha \parallel \beta$.

Tome $A' \neq P$ em r' e $B' \neq P$ em s'. Por esses pontos, trace retas paralelas à $\overleftrightarrow{PQ}$. Chame de A'' e B'' os pontos em que essas retas cortam β.

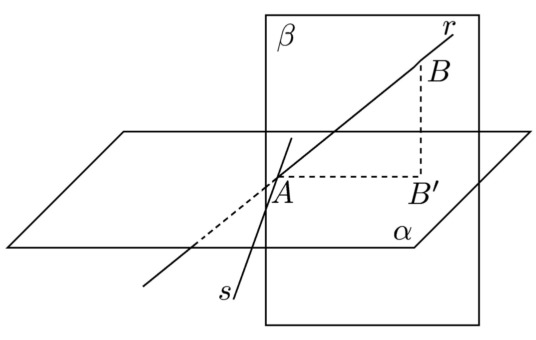
Então $\overline{A'P} \equiv \overline{A''Q}$, $\overline{PB'} \equiv \overline{QB''}$ e $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$, pois $\overline{A'A''} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{B'B''}$ (como na demonstração da proposição 13). Daí temos dos triângulos:



Queremos mostrar que $\theta = \gamma$

$\triangle PA'B' \sim \triangle QA''B''$ (triângulos semelhantes) pois $A'P \equiv A''Q$, $PB' \equiv QB''$ e $A'B' \equiv A''B''$ (lados congruentes). Logo $\theta = \gamma$.

13.



Tome $B \neq A$ em r. Seja B' o pé da perpendicular traçada de B ao plano α. Tem-se que $B' \neq A$, pois r é oblíqua a α.

Seja β o plano que contém B, A e B'. Seja s a reta contida em α que passa por A e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB'}$.

Como $\overleftrightarrow{BB'} \perp \alpha$ e $s \subset \alpha$, então $\overleftrightarrow{BB'} \perp s$.

Como $s \perp \overleftrightarrow{AB'}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são duas retas concorrentes de β, segue que $s \perp \beta$. Como $r = \overleftrightarrow{AB} \subset \beta$, conclui-se que $s \perp r$. Afirmamos que s é única. De fato, se existisse uma outra reta $s' \subset \alpha$ passando por A com $r \perp s'$, então r seria perpendicular a duas retas concorrentes de α, de onde se obtém que $r \perp \alpha$; mas isso contraria a hipótese.