Aula 19

1. Sejam α e β dois planos paralelos ($\alpha \parallel \beta$). Suponha γ um plano que corta α, $\alpha \cap \gamma = r$. Como $r \subset \alpha$ e $\alpha \parallel \beta$, pela proposição 4 desta aula, existe $r' \subset \beta$ tal que $r' \parallel r$.

Daí, pela proposição 10 que diz: se um plano corta uma de duas retas paralelas, então também corta a outra.

Então como γ corta r e $r \parallel r'$, γ corta r' e $r' \subset \beta$. Logo γ corta β.

2. $\alpha \parallel \beta$, $r \parallel \alpha$

Pela proposição 4, se $r \parallel \alpha$ existe $r' \subset \alpha$ tal que $r \parallel r'$ e como $\alpha \parallel \beta$ tem-se que $r' \parallel \beta$. Então existe uma reta contida em $\beta(s \subset \beta)$ tal que $s \parallel r'$ e $s \parallel \alpha$. Como $s \parallel r' \Rightarrow s \parallel r$ ou $s \equiv r$. Daí, $r \parallel \beta$ ou $r \subset \beta$.

3. Sejam α, β dois planos distintos.

Seja γ um plano tal que $\gamma \parallel \alpha$ e $\gamma \parallel \beta$.

Supor, por absurdo, que $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$.

Daí, temos que $r \subset \alpha$, mas como $\alpha \parallel \gamma$ então $r \parallel \gamma$ (absurdo, pois $r \subset \alpha$).

Então, temos que a hipótese de que $\alpha \nparallel \beta$ é falsa. Logo, $\alpha \parallel \beta$.

4.

Existem infinitas retas paralelas que passam por P e não cortam r, pois só existe uma reta paralela a α e que corta r.

Pela proposição 8, sabemos que por P existe um único plano paralelo α, seja $\beta \parallel \alpha$ e β corta r, $\beta \cap r = N$. $N \neq P$ pois $N \in r$ e $P \notin r$.

Por dois pontos distintos se determina uma <u>única</u> reta, então por P e N temos a reta t, $t \subset \beta$, pois $P \in \beta$ e $N \in \beta$, logo $t \parallel \alpha$ pois $\alpha \parallel \beta$.

Então temos que t é a única reta que corta r e é paralela a α.

Existe uma, e somente uma, reta paralela à α e passando por P, que intersecta r.

5. - Falsa

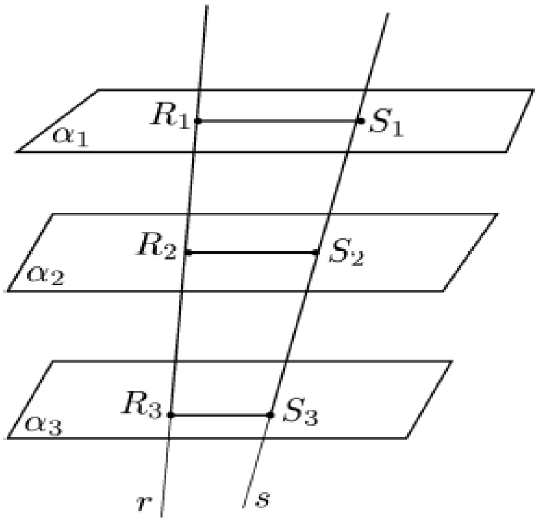
   - Falsa

   - Falsa

   - Falsa

   - Verdadeira

6. A seguinte demontração vale somente para o caso de r e s serem retas coplanares.



Os segmentos: $\overline{R_1S_1}$, $\overline{R_2S_2}$, $\overline{R_3S_3}$ ou são paralelos ou são reversos porque estão contidos em planos paralelos, mas como R_1, R_2 e R_3 pertencem a mesma reta r e S_1, S_2 e S_3 pertencem a mesma reta s, então os segmentos $\overline{R_1S_1} \parallel \overline{R_2S_2} \parallel \overline{R_3S_3}$ (são paralelos entre si).

Daí podemos usar o Teorema de Tales, que diz: Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os segmentos correspondentes da outra.

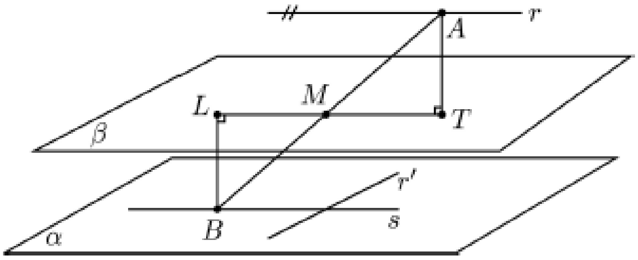
Então, $\dfrac{m(R_1R_2)}{m(R_2R_3)} = \dfrac{m(S_1S_2)}{m(S_2S_3)} \Rightarrow \dfrac{m(R_1R_2)}{m(S_1S_2)} = \dfrac{m(R_2R_3)}{m(S_2S_3)}$

$\dfrac{m(R_2R_3)}{m(R_1R_3)} = \dfrac{m(S_2S_3)}{m(S_1S_3)} \Rightarrow \dfrac{m(R_2R_3)}{m(S_2S_3)} = \dfrac{m(R_1R_3)}{m(S_1S_3)}$.

Logo, $\dfrac{m(R_1R_2)}{m(S_1S_2)} = \dfrac{m(R_1R_3)}{m(S_1S_3)} = \dfrac{m(R_2R_3)}{m(S_2S_3)}$.

7. r e s retas reversas.

Seja α um plano determinado pelas retas concorrentes r’ e s, onde, r’ ∥ r, então, r ∥ α.

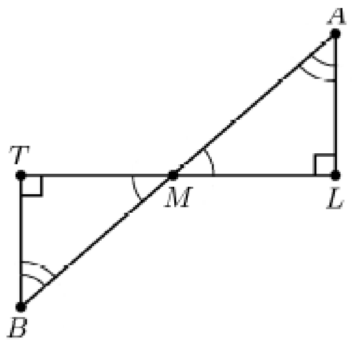


Existe um plano β equidistante de r e r' que é paralelo a α ($\alpha \parallel \beta$).

Basta provar que β é o plano do conjunto dos pontos médios.

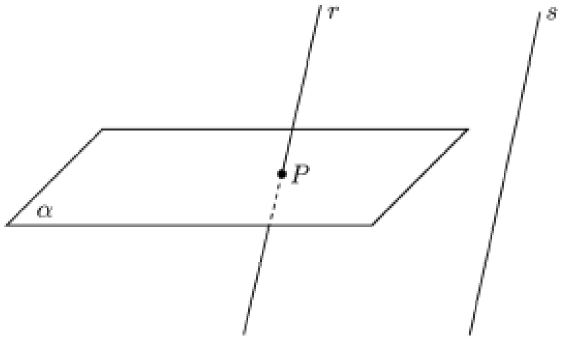
Seja $\overline{AB}$ um segmento qualquer, tal que $A \in r$ e $B \in s$. Sabemos que $d(\beta, A) = d(\beta, B)$.

Trace uma reta perependicular a β passando por A. Essa reta corta β em T. Trace também uma reta perpendicular a β passando por B. Essa reta corta β em L. Então temos:



Sabemos que $AL \parallel BT$ então $T\hat{B}M = M\hat{A}L$ (ângulos alternos internos) e $T\widehat{M}B = A\widehat{M}L$ (opostos pelo vértice). Logo, $\triangle MTB \equiv \triangle MAL$ (ângulos congruentes) então $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB}) \Rightarrow M$ é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $M \in \beta$. Como $\overline{AB}$ é um segmento qualquer, todos os pontos médios de segmentos da reta r a s pertencem a β.

8.



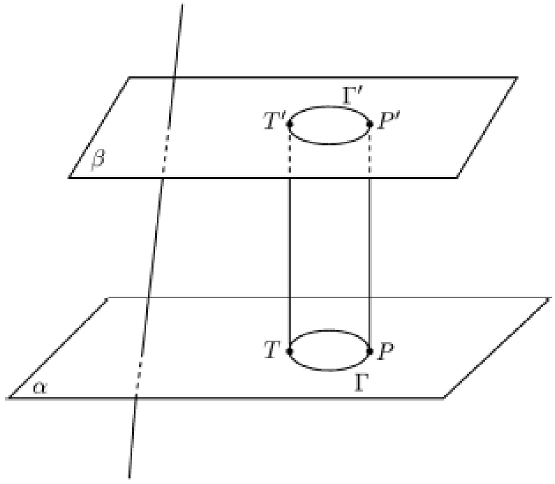
$r \parallel s$ e $\alpha \cap r = P$

Supor $\alpha \cap s = \emptyset \Rightarrow \alpha \parallel s$.

Logo existe $t \in \alpha$ tal que $t \parallel s$, mas como $r \parallel s$ então $r \parallel t$ e $t \in \alpha$. Daí $r \parallel \alpha$, o que é absurdo, pois $\alpha \cap r = P$.

Então $\alpha \cap s \neq \emptyset \Rightarrow \alpha$ corta s.

9.



$\alpha \parallel \beta$

$\overline{PT} = 2R =$ diâmetro de Γ.

T' é o ponto em β correspondente a T e P' é o ponto em β correspondente a P.

Se $\overline{PT}$ é o diâmetro do círculo em $\alpha \Rightarrow \overline{P'T'}$ é o diâmetro do círculo em β. E como $\overline{PT} \parallel \overline{P'T'} \Rightarrow \overline{PT} \equiv \overline{P'T'} = 2R$. Daí o círculo em β tem o mesmo raio que o do círculo em α.