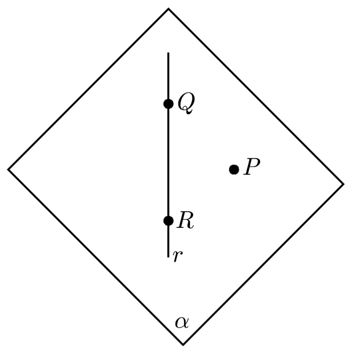
Aula 18

1. O maior número de retas que eles podem determinar é 3, que é quando A, B e C não são colineares.

2. O maior número de retas que 4 pontos distintos dois a dois podem determinar é 6, que é quando (por exemplo) A, B e C não são colineares e D não pertence à qualquer uma das retas determinadas por eles.

3. (a)

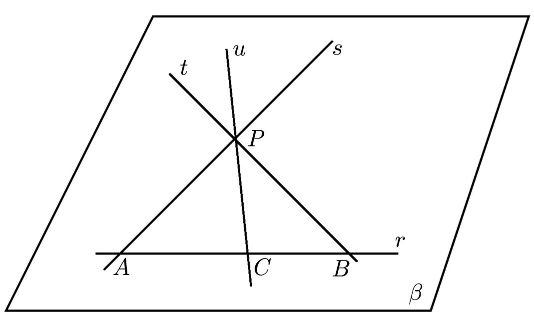


Sejam Q e R dois pontos distintos em r.

Como P, Q e R são não-colineares, existe um único plano que os contém. Seja α esse plano, r está contida em α pois dois pontos distintos de r pertencem a α. Logo o plano α contém r e P

É claro que α é único pois se existisse $\alpha' \neq \alpha$ tal que α' contém r e P então existiria um outro plano contendo P, Q e R e isto é absurdo.

(b)



Sejam s e t duas retas distintas que passam por P e cortam r.

Então $s \cap r = \{A\}$ e $t \cap r = \{B\}$. Obviamente $A \neq B$ e daí A, B e P são três pontos não colineares e daí existe um plano (único) que os contém.

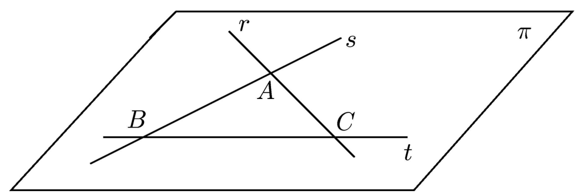
Seja β esse plano. É claro que $t \subset \beta$ e $s \subset \beta$ pois $t \cap \beta = \{B, P\}$ e $s \cap \beta = \{A, P\}$.

Vamos mostrar que qualquer outra reta que passe por P e corte r, está contida em β.

Seja u uma reta que pass por P e corta r, $u \cap r = \{c\}$. Como B não pertence a u, existe um plano β' que os contém. Como $c \in u \cap r$ temos que $r \cap \beta' = \{c, \beta\}$. Logo $r \subset \beta'$. Então, β' é um plano que contém P e r e logo $\beta' = \beta$ (pelo item a).

4. Sejam r, s e t três retas distintas e 2 a 2 concorrentes não passando pelo mesmo ponto.

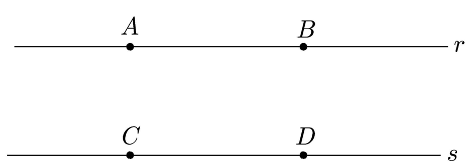
$r \cap s = \{A\}$
$s \cap t = \{B\}$
$r \cap t = \{C\}$



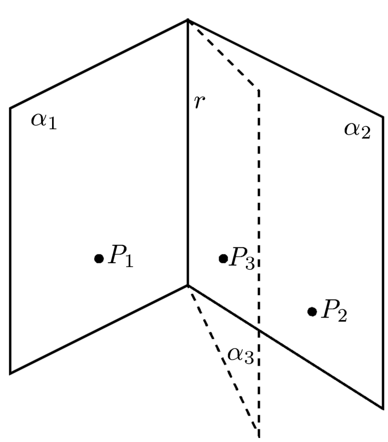
A, B e C são não colineares e daí, existe um único plano que os contém. Note que cada uma das retas acima têm 2 pontos distintos em π logo cada uma delas está contida em π, ou seja, r, s e t são coplanares.

5. Considere duas retas paralelas r e s. Em r tome 2 pontos distintos em A e B.

Em s tome 2 pontos distintos C e D. Então A, B, C e D obtidos desta maneira são 4 pontos não colineares.



6.



Sabemos que numa reta r bem como fora dela há infinitos pontos. Seja $P_1 \notin r$. Então existe um plano α_1 que os contém. Também já vimos que num plano bem como fora dele há infinitos pontos. Seja $P_2 \notin \alpha_1 \Rightarrow P_2 \notin r$ e logo existe um plano um plano α_2 que contém r e P_2. É claro que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$. Agora tome um ponto P_3 tal que $P_3 \notin \alpha_1$ e $P_3 \notin \alpha_2 \Rightarrow P_3 \notin r$ e daí existe um plano α_3 que contém r e P_3 e é claro que $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 = r$. Prosseguindo desta maneira construímos infinitos planos que contém r.

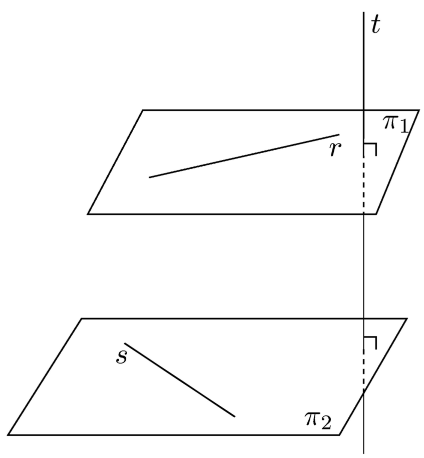
7. (a) Falsa
   (b) Falsa
   (c) Verdadeira
   (d) Verdadeira

8. Sejam r e s duas retas e α um plano que as contém.

   Seja α' um outro plano que contém r e s. Agora, sejam A e B dois pontos distintos em R e C um ponto em s.

   A, B e C são não colineares logo existe um único plano que os contém. Mas A, B e $C \in \alpha$ e $A, B, C \in \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha'$, ou seja, α é o único plano que contém r e s.

9.

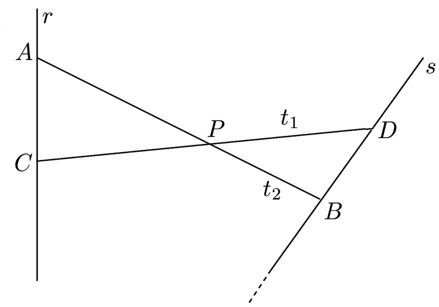


$\pi_1 \parallel \pi_2$

r e s são reversas
s e t são reversas
r e t são reversas

10. (a) Falsa
    (b) Falsa
    (c) Falsa
    (d) Falsa

11.



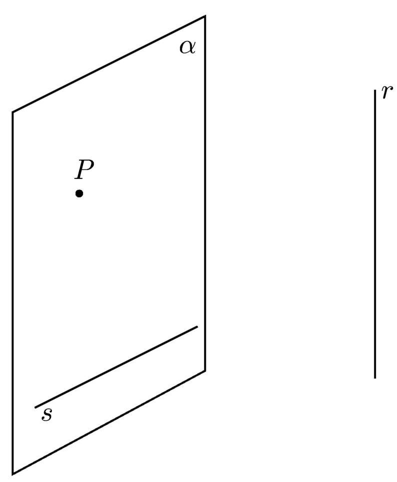
Suponha que existam duas retas t_1 e t_2 que passam por P e cortam r e s, e sejam $A = t_2 \cap r$, $B = t_2 \cap s$, $C = t_1 \cap r$ e $D = t_1 \cap D$.

Seja α o plano que contém t_1 e t_2.

Tem-se que os pontos A, B, C e D estão todos em α. Como α conté, dois pontos distintos de r, A e C, tem-se que $r \subset \alpha$. Da mesma forma, como os pontos D e B de s estão em α, segue que $s \subset \alpha$. Portanto, as retas r e s são coplanares, o que contraria a hipótese e prova que no máximo uma reta passa por P e corta r e s.

Pode-se garantir que sempre existe uma?

Não.



Tome uma reta r paralela a um plano α. Em seguida, tome uma reta s contifa em α e um ponto $P \in \alpha$ tal que $P \notin s$.

Toda reta que passa por P e corta s, está contida em α, não cortando, portanto, r.

12. Sejam r e s retas reversas e pontos $A \in r$, $B \in s$, α o plano que contém r e B, β o plano que contém s e A.

É claro que α e β são planos distintos pois r e s são reversas.

Sabemos que $\begin{cases} A \in r \subset \alpha \quad \text{e} \quad A \in \beta \Rightarrow A \in \alpha \cap \beta \\ B \in s \subset \beta \quad \text{e} \quad B \in \alpha \Rightarrow B \in \alpha \cap \beta \end{cases}$

Como A e B são distintos, existe uma única reta determinada por eles. Seja t essa reta. Temos que $\alpha \cap \beta = t$.

13. Seja r uma reta qualquer. Tome um ponto $A \notin r$. Existe uma única paralela a r que passa por A. Seja s essa reta. Então, as retas r e s determinam um único plano π que os contém. Agora, seja $B \notin \pi$. A reta s e o ponto B determinam um plano α tal que $r \parallel \alpha$ pois r é paralela a uma reta que está contida em α.

14. Suponha que existem dois planos que contenham r, isto é, eles são secantes e a interseção é r. Onde s é paralela a esses 2 planos.

Se s é paralela ao 1º plano então $\exists s' \in$ 1º plano tal que $s' \parallel s$.

Se s é paralela ao 2º plano então $\exists s'' \in$ 2º plano tal que $s'' \parallel s$.

Pela proposição 6 então $s \parallel r$.

Como $s \parallel r$, então existe um plano que as contêm. (absurdo) pois s e r são reversas.

15. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, AD, BC e DC, respectivamente. O lado EF é paralelo ao lado BD pois é o segmento que une os pontos médios dos lados AB e AD do triângulo ABD e além disso $m(EF) = \dfrac{m(BD)}{2}$.

O lado GH também é paralelo ao lado BD pois é o segmento que une os pontos médios dos lados BC e DC do triângulo BCD e além disso $m(GH) = \dfrac{m(BD)}{2}$. Assim $EF \parallel GH$ e $EF \equiv GH$.

Logo, o quadrilátero $EFGH$ tem 2 lados opostos paralelos congruentes e daí $EFGH$ é um paralelogramo.

16. Suponha que existam dois planos distintos, α e β, passando por P e paralelos a r e a s. Se $t = \alpha \cap \beta$, tem-se então que $r \parallel t$ e $s \parallel t$. Como r e s são distintas e ambas são paralelas a t, segue que $r \parallel s$, o que contraria a hipótese. Logo, existe no máximo um plano passando por P e paralelo às retas r e s.

Não. Se o ponto *P* e a reta *r* estiverem coplanares, o ponto *P* fora da reta *r* e ambos sobre um plano paralelo a reta *s* ou se o ponto *P* e a reta *s* estiverem coplanares, o ponto *P* fora da reta *s* e ambos sobre um plano paralelo a reta *r*, o plano que contém *P* será paralelo somente a uma das retas, já que ele contém a outra.

17. (a) Falsa

 (b) Falsa

 (c) Falsa

 (d) Falsa

 (e) Verdadeira

 (f) Falsa

18. Seja $s = \alpha \cap \beta$ e tome um ponto $A \in s$.

Seja γ o plano contendo r e o ponto A.

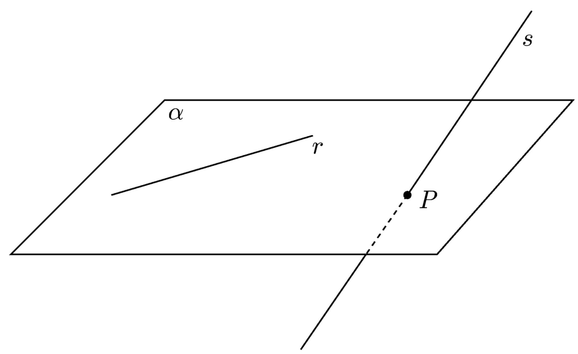
Como $A \in \gamma$ e $A \in \alpha$ temos que $A \in \gamma \cap \alpha$. Logo $\gamma \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \cap \alpha$ é uma reta que passa por A e que chamaremos de t_1.

Também temos que $A \in \gamma$ e $A \in \beta$ logo $\gamma \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \cap \beta$ é uma reta que passa por A e que chamaremos t_2.

γ é um plano contendo r e t_1. Mas $r \cap t_1 = \emptyset$ pois $t_1 \subset \alpha$ e $r \cap \alpha = \emptyset$, logo $r \parallel t_1$.

Usando um raciocínio análogo concluímos que $r \parallel t_2$. Daí, temos que $t_1 = t_2$ pois t_1 e t_2 são ambas paralelas a reta r contendo o ponto A. Logo, $\alpha \cap \beta = \{t_1\} = \{t_2\} \Rightarrow t_1 = t_2 = s$ e daí temos que $r \parallel s$.

19.



Se existisse um plano β contendo r e s, então β conteria r e P. Como só existe um plano contendo uma reta e um ponto que não lhe pertence e α contém r e P, segue que $\beta = \alpha$. Logo, α contém s, o que contraria a hipótese. Portanto, r e s são não coplanares.