

## Aula 32 – Inscrição e circunscrição de sólidos

### Objetivos

- Identificar se determinados sólidos são ou não inscritíveis.
- Identificar se determinados sólidos são ou não circunscritíveis.

### Introdução

Quando estudamos Geometria Plana, definimos polígonos inscritíveis e polígonos circunscritíveis. Analogamente, podemos considerar a inscrição e a circunscrição de alguns sólidos.

#### Definição 1

Um poliedro está inscrito em uma esfera se todos os seus vértices pertencem à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *inscritível*. Um poliedro está circunscrito a uma esfera se todas as faces do poliedro são tangentes à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *circunscritível*.

Quando um poliedro está inscrito em uma esfera, diz-se também que a esfera está circunscrita ao poliedro. Quando um poliedro está circunscrito a uma esfera, diz-se também que a esfera está inscrita no poliedro.

Como exemplo de poliedro inscritível podemos citar os paralelepípedos retangulares. Para ver que todo paralelepípedo retangular é inscritível, lembre que as diagonais de um paralelepípedo qualquer são concorrentes em um ponto e que esse ponto as divide ao meio. Além disso, as diagonais de um paralelepípedo retangular têm o mesmo comprimento. Logo, o ponto de encontro entre elas é equidistante dos vértices e a distância entre esse ponto e cada um dos vértices é a metade da medida de suas diagonais.

Como  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  é a medida das diagonais de um paralelepípedo retangular de medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , provamos que:

#### Proposição 1

Todo paralelepípedo retangular é inscritível. Se o paralelepípedo retangular tem medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  então o raio da esfera circunscrita é  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$ . Segue da proposição 8 que o raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta  $a$  é  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Uma pergunta natural que surge é: todo paralelepípedo é inscritível? A proposição a seguir diz que não.

**Proposição 2**

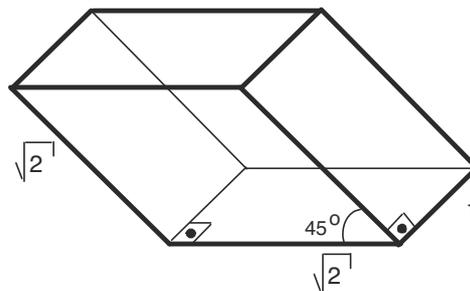
Todo paralelepípedo inscritível é retangular.

Prova:

Seja  $ABCDEFGH$  um paralelepípedo inscrito em uma esfera  $S$ . Sejam  $\alpha$  o plano da face  $ABCD$  e  $\mathcal{C}$  o círculo obtido pela interseção entre  $\alpha$  e  $S$ . Como  $A, B, C$  e  $D$  pertencem a  $\mathcal{C} = \alpha \cap S$ , o paralelogramo  $ABCD$  está inscrito em  $\mathcal{C}$ . Mas pode-se provar facilmente (veja exercício 1 desta aula) que todo paralelogramo inscritível é um retângulo. Logo, a face  $ABCD$  é um retângulo. Um raciocínio análogo prova que as outras faces são também retângulos. Assim, todas as faces de  $ABCDEFGH$  são retângulos e, portanto,  $ABCDEFGH$  é um paralelepípedo retangular.

Q.E.D.

Consideraremos, agora, a circunscrição de paralelepípedos. É um fato verdadeiro, e muito fácil de provar (veja exercício 2 desta aula), que todo paralelogramo circunscritível é um losango. É de se esperar que valha um resultado análogo para paralelepípedos, ou seja, que todo paralelepípedo circunscritível seja um *romboedro* (paralelepípedo que possui todas as arestas congruentes). Mas isso não é verdade. O paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível e não é um romboedro.



**Figura 32.1:** Paralelepípedo circunscritível que não é um romboedro.

Deixaremos como exercício (veja exercício 3 desta aula) a prova de que o paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível.

Para paralelepípedos circunscritíveis, vale o seguinte resultado:

### Proposição 3

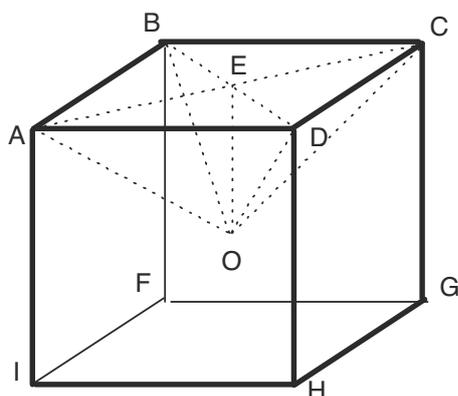
As faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

A prova desta proposição será deixada como exercício (veja exercício 4 desta aula).

Segue da proposição anterior que um paralelepípedo retangular circunscritível é um cubo.

Provaremos agora que todo cubo é inscritível.

Considere um cubo  $ABCD\text{FGHI}$  de aresta  $a$ . Já sabemos que ele é circunscritível e que o raio da esfera circunscrita é  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Seja  $O$  o centro dessa esfera e trace os segmentos  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $AC$  e  $BD$ . Seja  $E$  o ponto de encontro entre os segmentos  $AC$  e  $BD$  e trace o segmento  $OE$  (veja a **Figura 32.2**).



**Figura 32.2:**  $E$  é o ponto de encontro das diagonais da face.

Como  $OA \equiv OC$  e  $E$  é o ponto médio de  $AC$ , segue que  $OE$  é perpendicular a  $AC$ . Da mesma forma, como  $OB \equiv OD$  e  $E$  é o ponto médio de  $BD$ , tem-se que  $OE$  também é perpendicular a  $BD$ . Assim,  $OE$  é perpendicular a duas retas concorrentes do plano que contém  $ABCD$  e, portanto,  $OE$  é perpendicular à face  $ABCD$ . Como  $OBE$  é retângulo em  $E$ ,  $m(OB) = a\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $m(BE) = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ , segue do Teorema de Pitágoras que  $m(OE) = a/2$ .

Está provado que a distância de  $O$  ao plano da face  $ABCD$  é  $a/2$ . Da mesma forma, prova-se que a distância de  $O$  aos planos das outras faces é também  $a/2$ . Logo, a esfera de centro  $O$  e raio  $a/2$  é tangente a todas as faces do cubo. Está, então, provado que:

Proposição 4

Todo cubo é circunscritível. Se a aresta do cubo é  $a$ , o raio da esfera inscrita é  $\frac{a}{2}$ . Além disso, a esfera inscrita tangencia o cubo no centro de cada face.

Inscrição e circunscrição de tetraedros

Consideraremos, agora, a inscrição de tetraedros. A proposição a seguir será fundamental para esse fim.

Proposição 5

Por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera

Prova:

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos que não estão em um mesmo plano e seja  $\alpha$  o plano que contém  $B, C$  e  $D$ . Sabemos que existe um ponto  $E$  que equidista dos pontos  $B, C$  e  $D$ . O ponto  $E$  é precisamente o circuncentro do triângulo  $BCD$ . Seja  $r$  a reta perpendicular a  $\alpha$  e passando por  $E$  (veja **Figura 32.3**).

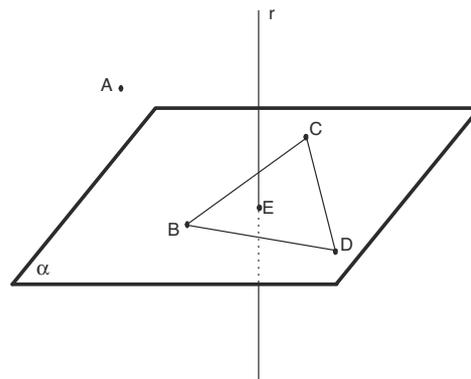
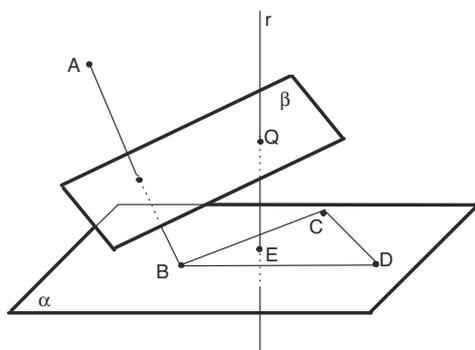


Figura 32.3: Prova da proposição 5.

Seja  $P$  um ponto de  $r$ . Usando o caso de congruência L.A.L. nos triângulos  $PBE, PEC$  e  $PED$ , podemos provar que  $PB \equiv PC \equiv PD$ , ou seja, todo ponto de  $r$  equidista de  $B, C$  e  $D$ .

Seja  $\beta$  o plano perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$  e que passa pelo ponto médio de  $AB$ . Podemos provar (veja o exercício 5 desta aula) que  $\beta$  equidista de  $A$  e  $B$ , ou seja, todo ponto de  $\beta$  equidista de  $A$  e  $B$ . Afirmamos que  $\beta$  intersecta  $r$ . Provaremos essa afirmação por contradição. Suponha que  $\beta$  e  $r$  sejam paralelos. Como  $r \perp \alpha$ , tem-se  $\beta \perp \alpha$  (justifique!). Como  $\overleftrightarrow{AB} \perp \beta$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  não está contida em  $\alpha$ , segue que  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\alpha$  são paralelos, o que é um absurdo, pois

$B \in \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha$ . Portanto,  $\beta$  intersecta  $r$  em um um ponto  $Q$  (veja **Figura 32.4**).



**Figura 32.4:** Prova da proposição 5.

Temos que  $m(QB) = m(QC) = m(QD)$ , pois  $Q \in r$ , e  $m(QA) = m(QB)$ , pois  $Q \in \beta$ . Logo,  $Q$  equidista de  $A, B, C$  e  $D$ , o que prova que a esfera centrada em  $Q$  e de raio  $m(QA)$  passa por  $A, B, C$  e  $D$ . Deixaremos como exercício (veja exercício 6 desta aula) a prova de que não existe outra esfera que passa por  $A, B, C$  e  $D$ .

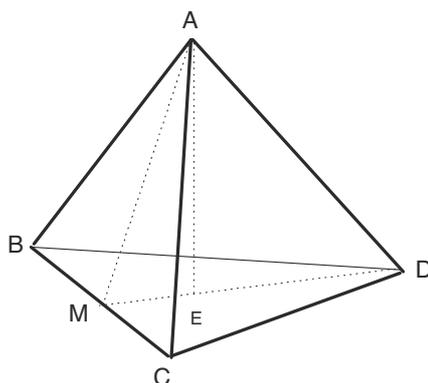
Q.E.D.

Como consequência imediata da proposição 5 temos o seguinte corolário:

Corolário: Todo tetraedro é inscritível.

Provaremos agora que todo tetraedro regular é circunscritível.

Seja  $ABCD$  um tetraedro regular e seja  $O$  o centro da esfera circunscrita. Sejam  $M$  o ponto médio de  $BC$ ,  $E$  o circuncentro de  $BCD$  e trace  $AM$ ,  $MD$  e  $AE$  (veja **Figura 32.5**).



**Figura 32.5:** Prova de que todo tetraedro regular é circunscritível.

Note que  $E \in MD$ , pois o triângulo  $BCD$  é equilátero. Como  $ABC$  e  $DBC$  são equiláteros e  $M$  é o ponto médio de  $BC$ , temos  $AM \perp BC$  e  $DM \perp BC$ . Logo,  $BC$  é perpendicular ao plano que contém os pontos  $A$ ,  $M$  e  $D$ . Segue que  $BC$  é perpendicular a  $AE$ . Da mesma forma, prova-se que  $AE$  e  $DC$  são perpendiculares. Logo,  $AE$  é perpendicular a duas retas concorrentes ( $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ ) do plano que contém  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Segue que  $AE$  é perpendicular ao plano da face  $BCD$ . Conseqüentemente, o centro  $O$  da esfera circunscrita pertence à reta  $\overleftrightarrow{AE}$ . De fato,  $O \in AE$  (prove isso!). Da mesma forma, prova-se que as retas que ligam  $O$  ao circuncentro (nesse caso coincide com o baricentro) das outras faces de  $ABCD$  são perpendicular às respectivas faces. Seja  $F$  o circuncentro de  $ABC$  e trace  $OF$  e  $OM$  (veja **Figura 32.6**).

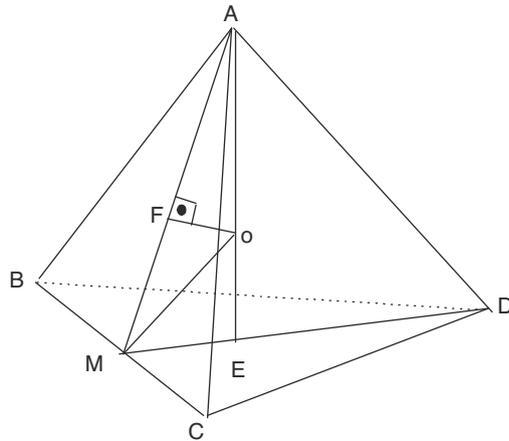


Figura 32.6:  $F$  é o baricentro de  $ABC$ .

Note que os triângulos  $OEM$  e  $OFM$  são retângulos em  $E$  e  $F$ , respectivamente. Além disso,

$$m(FM) = \frac{1}{3}m(AM) = \frac{1}{3}m(DM) = m(EM).$$

Os triângulos  $OEM$  e  $OFM$  são então congruentes, de onde se conclui que  $OE \equiv OF$ , ou seja, a distância de  $O$  ao plano da face  $BCD$  é igual à distância de  $O$  ao plano da face  $ABC$ . Da mesma forma, prova-se que a distância de  $O$  ao plano das outras faces é igual a  $m(OE)$ . Isso prova que a esfera de centro  $O$  e raio  $OE$  é tangente a todas as faces de  $ABCD$ . Logo, o tetraedro  $ABCD$  é circunscritível e o centro  $O$  da esfera circunscrita é também o centro da esfera inscrita. Observe que  $m(OE)$  é o raio da esfera inscrita e  $m(AO)$  é o raio da esfera circunscrita. Calcularemos, agora,  $m(OE)$  e  $m(AO)$ . Se a aresta do tetraedro mede  $a$ , sabemos que:

$$m(AM) = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$m(FM) = m(EM) = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ e}$$

$$m(AF) = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$m(AE)^2 = m(AM)^2 - m(EM)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Assim,

$$m(AE) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Como os triângulos  $AFO$  e  $AEM$  são semelhantes, tem-se

$$\frac{m(OF)}{m(EM)} = \frac{m(AO)}{m(AM)} = \frac{m(AF)}{m(AE)}.$$

Substituindo os valores de  $m(EM)$ ,  $m(AM)$ ,  $m(AF)$  e  $m(AE)$ , obtemos que  $m(OF) = \frac{a\sqrt{6}}{12}$  e  $m(AO) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

Sintetizando o que fizemos anteriormente, temos o seguinte resultado.

#### Proposição 6

Todo tetraedro regular é inscritível e circunscritível e as esferas inscrita e circunscrita têm o mesmo centro. Se a aresta do tetraedro vale  $a$ , então os raios  $r$  e  $R$  das esferas, respectivamente, inscrita e circunscrita, valem  $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$  e  $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ . Além disso, a esfera inscrita tangencia as faces em seus baricentros.

Sabemos que todo tetraedro é inscritível. Se o tetraedro for regular, sabemos que ele também é circunscritível e que os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Resta a seguinte pergunta: todo tetraedro é circunscritível? A resposta é sim, e a prova desse fato será deixada como exercício desta aula (veja o exercício 20 desta aula).

### Inscrição e circunscrição de um octaedro regular

Encerraremos esta aula com o estudo da inscrição e da circunscrição de um octaedro regular.

Seja  $ABCDEF$  um octaedro regular de aresta medindo  $a$ , e seja  $O$  o ponto de encontro das diagonais  $BD$  e  $CE$ . Trace  $AO$  (veja **Figura 32.7**).

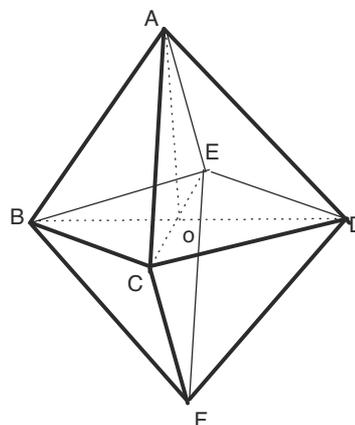
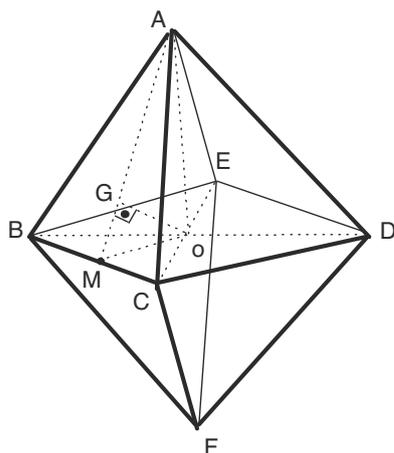


Figura 32.7: Octaedro regular.

Como  $AB \equiv AD \equiv AC \equiv AE$  (pois todas as arestas têm o mesmo comprimento) e  $O$  é o ponto médio de  $BD$  e de  $CE$ , tem-se que  $AO \perp BD$  e  $AO \perp CE$ . Segue que  $AO$  é perpendicular ao plano de  $BCDE$ . Além disso, os triângulos  $AOD$ ,  $AOE$ ,  $AOB$  e  $AOC$ , retângulos em  $O$ , são congruentes (por quê?). Em particular,  $OE \equiv OB \equiv OC \equiv OD$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$  e trace  $AM$  e  $OM$ . Seja  $OG$  a altura do triângulo  $AOM$  relativa ao lado  $AM$  (veja **Figura 32.8**).



**Figura 32.8:**  $BC$  é perpendicular ao plano que contém  $AMO$ .

Como  $AB \equiv AC$  e  $OB \equiv OC$ , tem-se que  $AM \perp BC$  e  $OM \perp BC$ , de onde se conclui que  $BC$  é perpendicular ao plano que contém  $AMO$ . Segue que  $OG$  é perpendicular a  $BC$ . Como  $OG \perp AM$ , conclui-se que  $OG$  é perpendicular à face  $ABC$ . Determinemos, agora,  $m(AO)$  e  $m(OG)$ . Como  $m(AD) = a$ ,  $m(OD) = \frac{1}{2}m(BD) = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$  e  $AOD$  é retângulo em  $O$ , segue do teorema de Pitágoras que

$$m(AO)^2 = m(AD)^2 - m(OD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ou seja,  $m(AO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Da mesma forma, prova-se que  $m(FO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Como a distância de  $O$  a cada um dos pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  é também  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ , segue que a esfera de centro  $O$  e raio  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  passa por todos os vértices do octaedro. Para determinar  $m(OG)$ , usaremos a semelhança entre os triângulos  $AOM$  e  $AGO$ .

Dessa semelhança, temos

$$\frac{m(OM)}{m(OG)} = \frac{m(AM)}{m(AO)} = \frac{m(AO)}{m(AG)}$$

Como  $m(OM) = \frac{a}{2}$ ,  $m(AM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  e  $m(AO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , obtemos que  $m(OG) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$  e que  $m(AG) = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}m(AM)$ .

Como  $OG$  é perpendicular à face  $ABC$ , segue que a distância de  $O$  à face  $ABC$  é  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ . Além disso, como  $m(AG) = \frac{2}{3}m(AM)$ , tem-se que  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ . Da mesma forma, prova-se que a distância de  $O$  às demais faces é  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ . Assim, a esfera de centro  $O$  e raio  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$  é tangente a todas as faces do octaedro e os pontos de tangência são precisamente os baricentros das faces. Está provado, então, que:

#### Proposição 7

Um octaedro regular é inscritível e circunscritível e os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Se a aresta do octaedro mede  $a$ , então os raios das esferas inscrita e circunscrita medem, respectivamente,  $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$  e  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Além disso, a esfera inscrita tangencia o octaedro nos baricentros das faces.

## Resumo

Nesta aula você aprendeu...

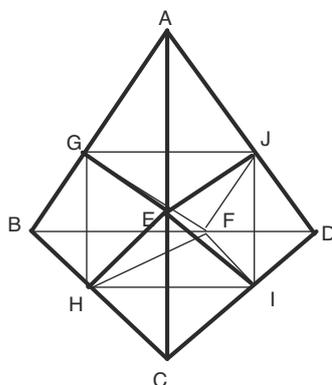
- Que todo paralelepípedo retangular é inscritível.
- Que todo paralelepípedo inscritível é retangular.
- Que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.
- Que por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera.
- Que todo tetraedro é inscritível e circunscritível.
- Que todo octaedro regular é inscritível e circunscritível.

## Exercícios

1. Prove que todo paralelogramo inscritível é retângulo.
2. Prove que todo paralelogramo circunscritível é losango.
3. Prove que o paralelepípedo da **Figura 32.1**, do texto, é circunscritível.
4. Prove que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

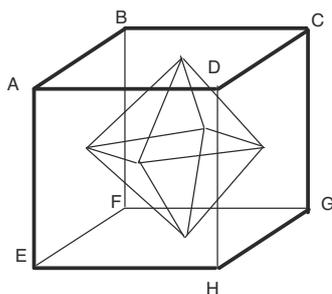
*Sugestão:* Prove que a altura do paralelepípedo em relação a qualquer face é a mesma e use a fórmula para o volume de um paralelepípedo.

5. Sejam  $AB$  um segmento e  $\beta$  o plano perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$  e passando pelo ponto médio de  $AB$ . Prove que, para todo  $P \in \beta$  tem-se  $m(P, A) = m(P, B)$ .
6. Prove que a esfera que passa por quatro pontos não coplanares é única.
7. Seja  $ABCD$  um tetraedro regular de aresta  $a$ . Prove que o octaedro determinado pelos pontos médios das arestas do tetraedro é regular e determine a medida de suas arestas (veja **Figura 32.9**).



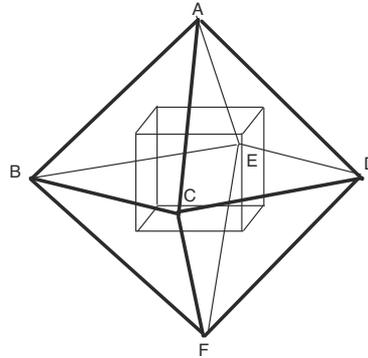
**Figura 32.9:** Exercício 7.

8. Seja  $ABCDEFGH$  um cubo de aresta medindo  $a$ . Prove que é regular o tetraedro determinado pelos centros das faces do cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura 32.10**).



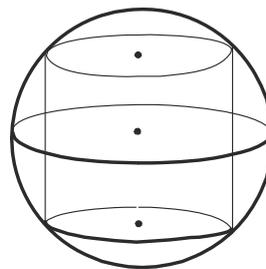
**Figura 32.10:** Exercício 8.

9. Seja  $ABCDEF$  um octaedro regular de aresta medindo  $a$ . Prove que o poliedro determinado pelos centros das faces do octaedro é um cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura 32.3**).



**Figura 32.11:** Exercício 9.

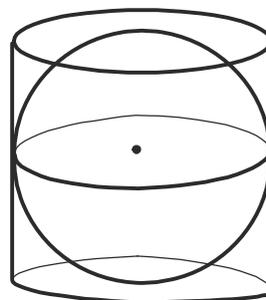
10. Dizemos que um cilindro está inscrito em uma esfera se os círculos das bases estão contidos na esfera (veja **Figura 32.4**).



**Figura 32.12:** Exercício 10.

Prove que se um cilindro está inscrito em uma esfera, então ele é reto.

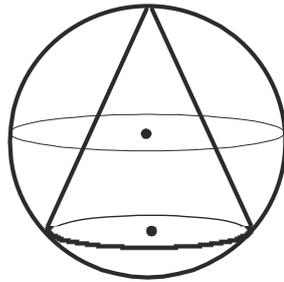
11. Determine o raio de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio  $R$ .
12. Dizemos que um cilindro está circunscrito a uma esfera se os planos das suas bases são tangentes à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja a **Figura 32.13**).



**Figura 32.13:** Exercício 12.

Se um cilindro está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

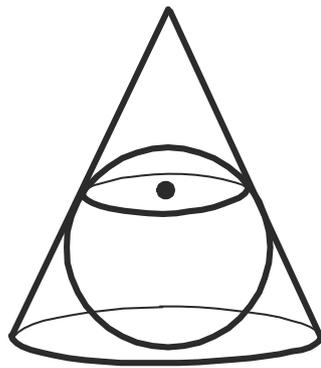
13. Um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio  $R$ . Prove que esse cilindro é equilátero e determine seu raio.
14. Dizemos que um cone está inscrito em uma esfera se o seu vértice pertence à esfera e o círculo da base está contido na esfera (veja **Figura 32.14**).



**Figura 32.14:** Exercício 14.

Determine a altura de um cone reto de raio da base  $r$  inscrito em uma esfera de raio  $R$ .

15. Dizemos que um cone está circunscrito a uma esfera se sua base é tangente à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja **Figura 32.15**).



**Figura 32.15:** Exercício 15.

Se um cone está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

16. Um cone reto de altura  $h$  e raio  $r$  está circunscrito a uma esfera. Determine o raio dessa esfera.

17. Determine o volume do cone equilátero circunscrito a uma esfera de raio  $R$ .
18. Um cilindro e um cone reto estão inscritos em uma esfera de raio  $5\text{ cm}$ , de modo que a base do cone coincide com a base inferior do cilindro. Se o cone e o cilindro têm o mesmo volume, determine a área lateral do cone.

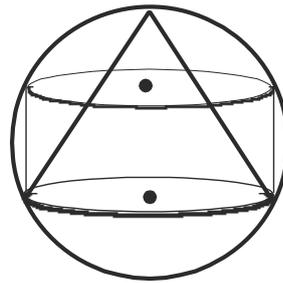


Figura 32.16: Exercício 18.

19. Considere dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  que se intersectam segundo uma reta  $r$ , e seja  $\gamma$  um plano perpendicular a  $r$  em um ponto  $A$ . Sejam  $s = \alpha \cap \gamma$  e  $t = \beta \cap \gamma$ . Sejam  $u_1$  e  $u_2$  as retas que contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por  $s$  e  $t$  (veja a Figura 32.17).

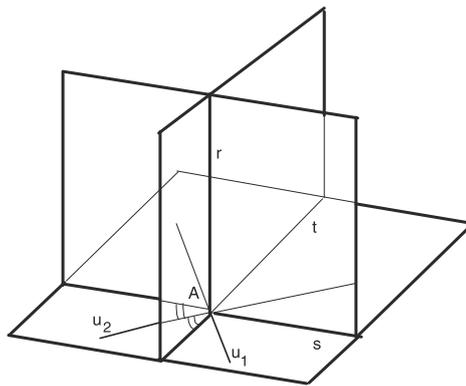
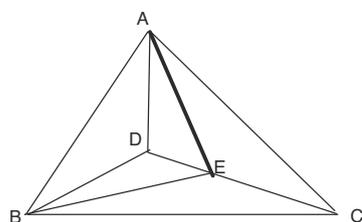


Figura 32.17: Exercício 19.

Sejam  $\pi_1$  o plano determinado por  $r$  e  $u_1$  e  $\pi_2$  o plano determinado por  $r$  e  $u_2$ . Prove que  $\pi_1 \cup \pi_2$  é o conjunto dos pontos que equidistam de  $\alpha$  e  $\beta$ . Chamaremos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  de planos bissetores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

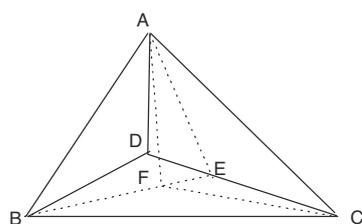
20. Prove que todo tetraedro é circunscritível.

*Sugestão:* Seja  $ABCD$  um tetraedro e considere o plano bissetor dos planos das faces  $ABC$  e  $ABD$  que contém pontos da face  $BCD$ . Esse plano intersecta  $CD$  em um ponto  $E$  (veja **Figura 32.18**).



**Figura 32.18:** Exercício 20.

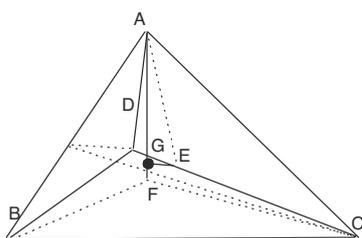
Considere agora o plano bissetor dos planos das faces  $ABC$  e  $ADC$  que contém pontos de  $BCD$ . Esse plano intersecta  $BE$  em um ponto  $F$  (veja **Figura 32.19**).



**Figura 32.19:** Exercício 20.

Finalmente, considere o plano bissetor dos planos das faces  $ADC$  e  $BDC$  que contém pontos de  $ABD$ .

Esse plano intersecta  $AF$  em um ponto  $G$  (veja **Figura 32.20**).



**Figura 32.20:** Exercício 20.

Use o exercício 19 para provar que  $G$  equidista das quatro faces do tetraedro.