Aula 30 – Área de superfícies - parte I

Objetivo

- Determinar áreas de algumas superfícies curvas.

Introdução

Suponha que um pintor utilize x litros de tinta para pintar uma parede quadrada de $1\,m$ de lado e y litros de tinta para pintar a parte externa de uma torre de uma igreja (**Figura 30.1**).

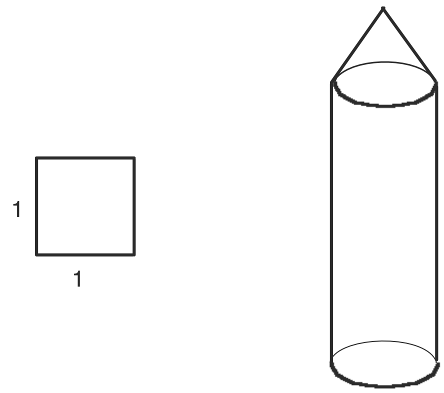

Figura 30.1: Área de superfícies curvas.

Se a camada de tinta da parede e da torre tiverem a mesma espessura, podemos dizer que a área da parte externa da torre é $\dfrac{y}{x}$ vezes maior que a área da parede. Se adotarmos um quadrado de lado $1\,m$ como unidade de área, então a área da parte externa da torre é $\dfrac{y}{x}\,m^2$. Assim, para medir a área de qualquer superfície, basta pintá-la e verificar a quantidade de tinta utilizada. Entretanto, pelas razões já descritas quando introduzimos o conceito de área de figuras planas, devemos ser capazes de calcular a área de superfícies sem apelar para nenhum método empírico. Se uma superfície for formada por pedaços de planos, cujas áreas sabemos calcular, então saberemos dizer qual a área da superfície. Por exemplo, é fácil calcular a área da superfície lateral de um prisma, a área de uma pirâmide, a área de um octaedro, a área de um poliedro etc. (veja a **Figura 30.2**).

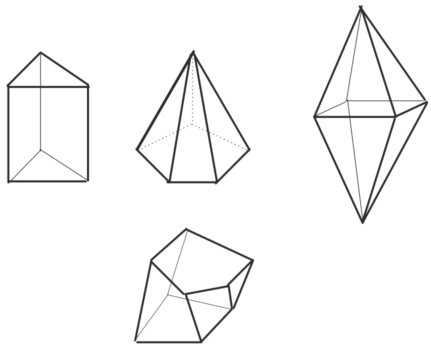

Figura 30.2: Exemplos de superfícies cujas áreas sabemos calcular.

Mas, e se a superfície for curva, como, por exemplo, a superfície lateral de um cone, a superfície lateral de um cilindro, ou uma esfera?

Antes de falarmos mais formalmente sobre esse assunto, exploremos um pouco a nossa intuição. Vamos chamar de e a espessura da camada de tinta utilizada na pintura de uma chapa retangular de área A. Para facilitar o raciocínio, suponhamos que a chapa não tem espessura. Após a pintura, a chapa toma a forma de um paralelepípedo retangular de altura e e base retangular de área A (veja a **Figura 30.3**).

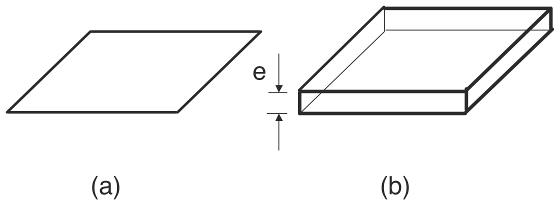

Figura 30.3: (a) Chapa não pintada (b) chapa pintada.

O volume V de tinta utilizada é exatamente o volume do paralelepípedo retangular, ou seja, $V = A \times e$. Daí, obtém-se que

(I) $$A = \frac{V}{e}$$

Vamos considerar, agora, a pintura da superfície lateral de uma lata na forma de um cilindro circular reto. Chamemos de R o raio do cilindro, de h a sua altura e de e a espessura da camada de tinta. Após a pintura, a superfície lateral transforma-se no sólido limitado pelos cilindros (com mesmo eixo) de altura h e raios R e $R + e$ (veja **Figura 30.4**).

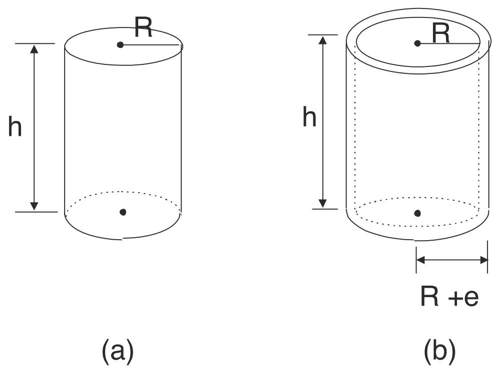

Figura 30.4: (a) Lata não pintada, (b) lata pintada.

O volume de tinta utlizado é exatamente a diferença entre os volumes dos dois cilindros, ou seja,

(II) $$V = \pi(R+e)^2h - \pi R^2h = \pi eh(2R+e)$$

No exemplo da chapa retangular, as bases inferior e superior do paralelepípedo têm área igual a A e (I) vale para qualquer valor de e. No exemplo da lata, as áreas laterais dos dois cilindros são diferentes e a área lateral da lata não pode ser dada por (I). Contudo, se o valor de e for bastante pequeno, as áreas laterais dos dois cilindros são praticamente iguais e podemos aproximar o valor A da área lateral da lata por

(III) $$A \simeq \frac{V}{e} = \frac{\pi eh(2R+e)}{e} = \pi h(2R+e)$$

Essa aproximação será tanto melhor quanto menor for o valor de e. Isso nos faz conjecturar que (III) nos dá o valor exato se fizermos $e = 0$. Assim, é de se esperar que a área lateral de um cilindro reto de raio R e altura h seja dada por $A = 2\pi Rh$. Veremos adiante que, de fato, esse é o valor da área lateral de um cilindro.

Usando as mesmas idéias acima, podemos descobrir qual deve ser a fórmula que determina a área da esfera. Para isso, considere duas esferas concêntricas de raios R e $R+e$ (veja **Figura 30.5**).

O volume do sólido limitado pelas duas esferas é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi(R+e)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2e + 3Re^2 + e^3 - R^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi e(3R^2 + 3Re + e^2) \end{aligned}$$

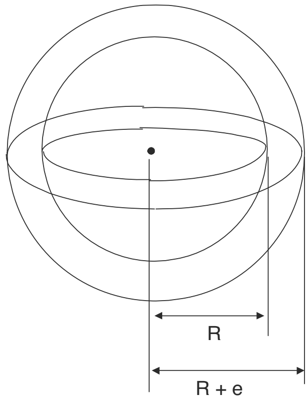

Figura 30.5: Esferas concêntricas.

Um valor aproximado para a área A da esfera é

$$\text{(IV)} \qquad A \simeq \frac{V}{e} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Re + e^2) \ ,$$

e essa aproximação será tanto melhor quanto menor for o valor de e, e (IV) deverá dar o valor exato se $e = 0$. Assim, é de se esperar que a área de uma esfera de raio R seja $A = 4\pi R^2$. Veremos adiante que esse é realmente o valor da área da esfera.

Área de superfícies

Em aulas anteriores, aprendemos a calcular a área de algumas figuras planas como o paralelogramo, o triângulo, o trapézio, o círculo etc. Isso foi feito a partir de algumas propriedades (propriedades análogas permitem determinar o volume dos principais sólidos). Essas propriedades referem-se a superfícies planas e, portanto, não podem ser utilizadas para determinar a área de superfícies como a esfera, a superfície lateral do cilindro ou a superfície lateral do cone.

Para resolver satisfatoriamente esse problema, é necessário dar uma definição precisa do conceito de superfície (que inclui as superfícies planas e as superfícies curvas citadas acima) bem como o de sua área. Para isso, é necessário utilizar ferramentas que estão fora do conteúdo desta disciplina. Tais ferramentas serão estudadas nos cursos de Cálculo e, com elas, podemos determinar áreas (e volumes) de objetos que, de outra forma, não conseguiríamos ou teríamos grandes dificuldades de fazê-lo. Por isso, a determinação da área das principais superfícies curvas será feita de maneira elementar e intuitiva.

Área do cilindro e do cone

A superfície de um cilindro é composta de suas bases e de uma superfície lateral. Como já sabemos calcular a área de um círculo, nos concentraremos, agora, na tarefa de determinar a área lateral de um cilindro (área da superfície lateral).

Dado um cilindro reto de raio R e altura h, podemos cortar sua superfície lateral ao longo de uma geratriz e desenrolá-lo até obtermos um retângulo de lados medindo $2\pi R$ e h (veja **Figura 30.6**).

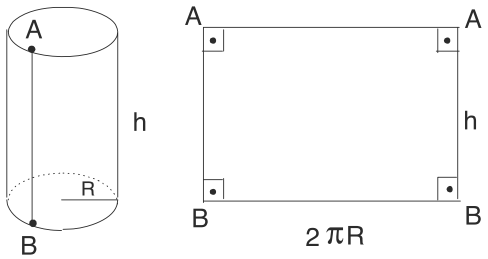

Figura 30.6: Planificação de um cilindro.

Esse procedimento, chamado planificação, não altera a área lateral do cilindro e, como sabemos calcular a área de um retângulo, podemos determinar facilmente o seu valor:

$$\text{Área lateral do cilindro} = \text{Área do retângulo} = 2\pi Rh$$

Portanto,

A área lateral do cilindro é dada pelo produto da altura pelo comprimento do círculo da base.

A superfície de um cone é composta de sua base e de sua superfície lateral. Considere um cone reto com raio da base medindo R. Lembramos que, em um cone reto, todas as geratrizes têm o mesmo comprimento. Chamemos de g a medida de suas geratrizes. Para determinar sua *área lateral* (área da superfície lateral), fazemos, como no caso do cilindro, uma planificação: cortamos o cone ao longo de uma geratriz e o desenrolamos até transformá-lo em um setor de um círculo de raio g que subtende um arco de comprimento igual a $2\pi R$ (veja **Figura 30.7**).

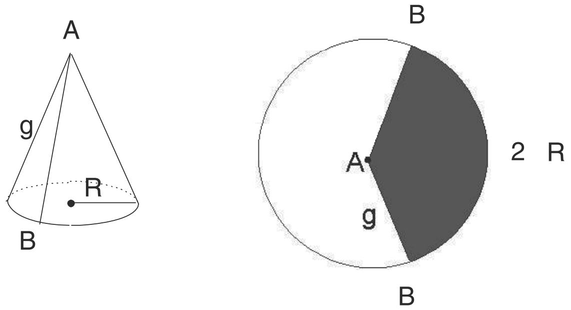

Figura 30.7: Planificação de um cone.

A área lateral do cone é igual à área do setor circular obtido que, por sua vez, é proporcional ao comprimento do arco subentendido:

$$\frac{\text{Área(setor)}}{\pi g^2} = \frac{2\pi R}{2\pi g}$$

Logo,

$$\text{Área(lateral do cone)} = \text{Área(setor)} = \pi R g = \frac{1}{2} g(2\pi R)$$

Portanto,

A área lateral do cone é a metade do produto da geratriz pelo comprimento do círculo da base.

Lembramos que a altura, a geratriz e o raio da base de um cone reto estão relacionados pela fórmula (veja **Figura 30.8**):

$$g = \sqrt{h^2 + R^2}$$

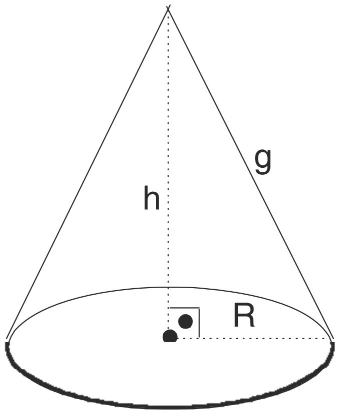

Figura 30.8: Altura (h), geratriz (g) e raio da base (R) de um cone.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A calcular a área de cilindros, cones e esferas.

Exercícios

1. Um cilindro reto e um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero, têm a mesma altura e a mesma área lateral. Determine a razão entre o volume do cilindro e o volume do prisma.

2. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de 90^o. Se o raio da base do cone é $5\,cm$, determine a altura do cone.

3. Um cilindro e um cone, ambos retos, possuem o mesmo raio da base e suas geratrizes têm a mesma medida. Determine a razão entre a área lateral do cone e a área lateral do cilindro.

4. Em um cone reto, o ângulo entre uma geratriz e o eixo é α. Determine o ângulo do setor circular obtido pela planificação do cone.

5. Prove que, de todos os cilindros de mesmo volume, o cilindro equilátero é o que possui a menor área total.

6. (UFPA, 1985) A área lateral de um cilindro reto é metade da área da base. Se o perímetro de sua seção meridiana é $18\,m$, o volume vale:

   (a) $8\pi\,m^3$ (b) $10\pi\,m^3$ (c) $12\pi\,m^3$ (d) $16\pi\,m^3$ (e) $20\pi\,m^3$

7. (ITA, 1977) Se S é a área total de um cilindro reto de altura h, e se m é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de h é dado por:

   (a) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+2)}}$ (b) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{4\pi(m+2)}}$

   (c) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{2\pi(m+2)}}$ (d) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{4\pi(m+1)}}$ (e) N.R.A.

8. (U.MACK, 1975) A altura de um cilindro é $20\,cm$. Aumentando-se o raio desse cilindro de $5\,cm$, a área lateral do novo cilindro fica igual à área total do primeiro. O raio do primeiro cilindro, em cm, é:

   (a) 10 (b) 8 (c) 12 (d) 5 (e) 6

9. (ITA, 1988) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo do cone um ângulo de 45^o. Sabendo-se que o perímetro de sua seção meridiana vale $2\,cm$, podemos afirmar que a área total desse cone vale:

   (a) $\dfrac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-2)\,cm^2$ (b) $\pi(\sqrt{2}-1)\,cm^2$

   (c) $\pi(\sqrt{3}-1)\,cm^2$ (d) $\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)\,cm^2$ (e) $\pi(\sqrt{5}-1)\,cm^2$