

## Aula 21 – Ângulos no espaço - parte II

### Objetivos

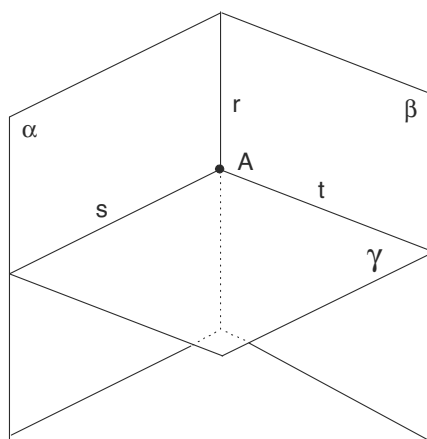
- Identificar ângulos entre planos e entre retas e planos.
- Determinar distâncias no espaço.

### Introdução

Nesta aula, dando continuidade ao nosso estudo de ângulos, veremos como se definem o ângulo entre dois planos e o ângulo entre uma reta e um plano no espaço. Veremos também como calcular a distância entre um ponto e uma reta, e entre um ponto e um plano.

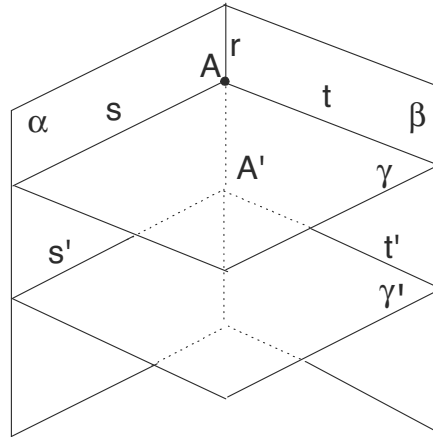
### Ângulo entre planos e perpendicularismo entre planos

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  planos que se cortam e seja  $r$  a reta de interseção entre eles. Tome um ponto  $A \in r$  e chame de  $\gamma$  o plano que passa por  $A$  e é perpendicular a  $r$ . Esse plano intersecta  $\alpha$  e  $\beta$  segundo as retas  $s$  e  $t$ , respectivamente, como na **Figura 21.1**.



**Figura 21.1:** Definição de ângulo entre planos.

O ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  é definido como o ângulo entre as retas  $s$  e  $t$ . Prova-se (veja exercício 16) que o valor do ângulo não depende do ponto  $A$  escolhido, como está ilustrado na **Figura 21.2**.



**Figura 21.2:** O ângulo entre  $s$  e  $t$  é igual ao ângulo entre  $s'$  e  $t'$ .

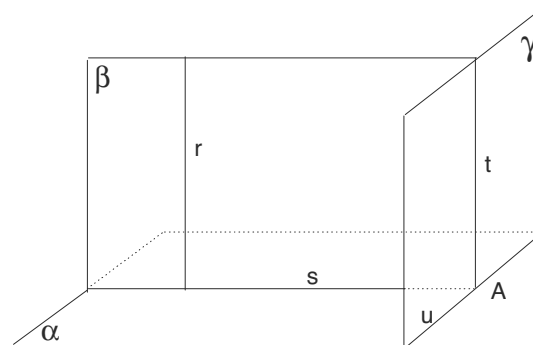
Dois planos são ditos perpendiculares se o ângulo entre eles for de  $90^\circ$ . A seguinte proposição fornece um ótimo critério para concluir que dois planos são perpendiculares.

**Proposição 1**

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então esses planos são perpendiculares.

Prova:

Seja  $r$  uma reta perpendicular a um plano  $\alpha$  e suponha que o plano  $\beta$  contenha  $r$ . Queremos mostrar que  $\alpha$  é perpendicular a  $\beta$ . Para isso, seja  $s = \alpha \cap \beta$ , e considere um ponto  $A \in s$  que não pertença a  $r$ . Seja  $\gamma$  o plano que passa por  $A$  e é perpendicular a  $s$ . Esse plano corta  $\alpha$  e  $\beta$  segundo retas  $u$  e  $t$ , respectivamente (**Figura 21.3**). Por definição de perpendicularismo entre planos, para provar que  $\beta \perp \alpha$ , temos que mostrar que  $u \perp t$ .



**Figura 21.3:** Prova de que  $\alpha \perp \beta$ .

Em primeiro lugar,  $r \perp s$ , pois  $r$  é perpendicular a  $\alpha$  e  $s \subset \alpha$ . Como  $s$  é perpendicular a  $\gamma$  por construção do plano  $\gamma$ , segue do exercício 2 da Aula 20 que  $r$  é paralela a  $\gamma$ . Isso implica que  $r$  e  $t$  não se intersectam. Como  $r$  e  $t$  são coplanares (ambas pertencem a  $\beta$ ), conclui-se que  $r$  e  $t$  são paralelas. Como  $r \perp \alpha$ , segue que  $t$  é perpendicular a  $\alpha$ . Assim,  $t$  é perpendicular a qualquer reta contida em  $\alpha$ . Mas  $u$  está em  $\alpha$ , pois  $u = \gamma \cap \alpha$ . Logo,  $t$  é perpendicular a  $u$ . Q.E.D.

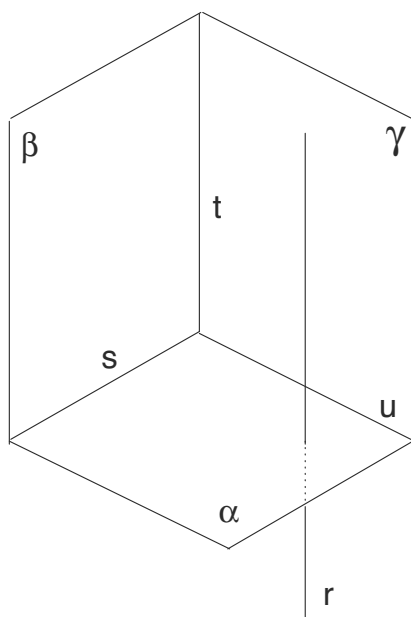
A proposição seguinte também relaciona perpendicularismo entre reta e plano com perpendicularismo entre planos.

### Proposição 2

Se uma reta  $r$  e um plano  $\beta$  são perpendiculares a um plano  $\alpha$ , então  $r$  está contida em  $\beta$  ou  $r$  é paralela a  $\beta$ .

Prova:

Suponha que  $r$  não esteja contida em  $\beta$ . Provaremos que  $r$  é paralela a  $\beta$ . Para isso, seja  $s = \alpha \cap \beta$  e considere um plano  $\gamma$  perpendicular a  $s$ . O plano  $\gamma$  corta  $\alpha$  e  $\beta$  segundo retas que chamaremos  $u$  e  $t$ , como na **Figura 21.4**.



**Figura 21.4:** Prova da proposição 24.

Como  $\gamma \perp s$  por construção, tem-se  $s \perp t$  e  $s \perp u$ . Além disso, por definição de perpendicularismo entre planos, tem-se que  $t \perp u$ . Logo,  $t$  é perpendicular às retas concorrentes  $s$  e  $u$  contidas em  $\alpha$ . Concluímos então que  $t \perp \alpha$ . Mas  $r$  é perpendicular a  $\alpha$  por hipótese, e  $r \neq t$ , porque  $t$  está contida em  $\beta$  e  $r$  não está. Segue então, da proposição 5, que  $r$  é paralela a  $t$ . Como  $t \subset \beta$ , conclui-se que  $r$  é paralela a  $\beta$ . Q.E.D.

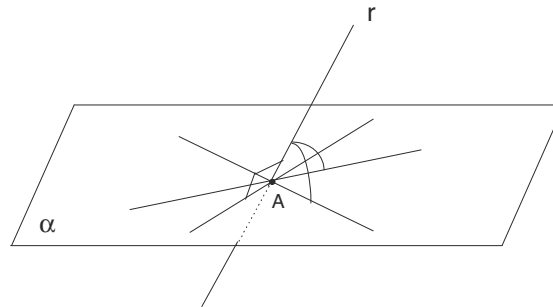
A seguinte proposição decorre diretamente das anteriores e será deixada como exercício ao fim desta aula.

**Proposição 3**

Se dois planos secantes são perpendiculares a um plano, então a reta de interseção entre eles é perpendicular a esse plano.

**Ângulo entre uma reta e um plano**

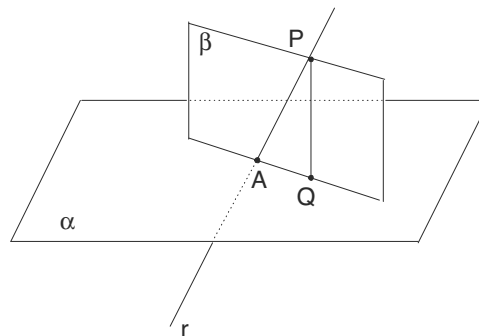
Considere uma reta  $r$  oblíqua a um plano  $\alpha$ , intersectando-o no ponto  $A$ . Observe que as retas que estão em  $\alpha$  e passam por  $A$  fazem com  $r$  ângulos que podem ser bem diferentes. Veja a **Figura 21.5**. Por esse motivo, a definição de ângulo entre reta e plano merece um certo cuidado.



**Figura 21.5:** O ângulo entre  $r$  e as retas de  $\alpha$  varia.

Se  $r$  for perpendicular a  $\alpha$ , existem infinitos planos perpendiculares a  $\alpha$  contendo  $r$  (como você verá no exercício 3 desta aula). A situação é diferente no caso em que  $r$  é oblíqua a  $\alpha$ : existe um único plano contendo  $r$  e perpendicular a  $\alpha$ . Vamos mostrar essa afirmação.

Para isso, seja  $A = r \cap \alpha$  e tome um ponto  $P \neq A$  em  $r$ . Chame de  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  ao plano  $\alpha$ . Temos que  $Q \neq A$ , pois estamos assumindo que  $r$  é oblíqua a  $\alpha$ . Seja  $\beta$  o plano que passa pelos pontos  $P, Q$  e  $A$  (veja a **Figura 21.6**).



**Figura 21.6:** Plano contendo  $r$  e perpendicular a  $\alpha$ .

Como  $\beta$  contém a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ , que é perpendicular a  $\alpha$ , segue que  $\beta \perp \alpha$ . Além disso,  $\beta$  contém  $r$  (pois contém os pontos  $P$  e  $A$ , pertencentes a  $r$ ). Está provado então que existe um plano perpendicular a  $\alpha$  que contém  $r$ .

Para provar a unicidade, considere um plano  $\gamma$  contendo  $r$  e perpendicular a  $\alpha$ . Como  $\overleftrightarrow{PQ}$  é perpendicular a  $\alpha$ , obtém-se da proposição 2 que  $\overleftrightarrow{PQ} \subset \gamma$  ou  $\overleftrightarrow{PQ} // \gamma$ . Não podemos ter o segundo caso, pois  $P \in r \subset \gamma$ . A conclusão é que  $\overleftrightarrow{PQ}$  está contida em  $\gamma$ , de onde se conclui que  $\gamma$  contém os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $A$ . Mas esses pontos determinam o plano  $\beta$ , o que mostra que  $\gamma = \beta$ . Concluimos então que só existe um plano perpendicular a  $\alpha$  contendo  $r$ . Provamos então a proposição a seguir:

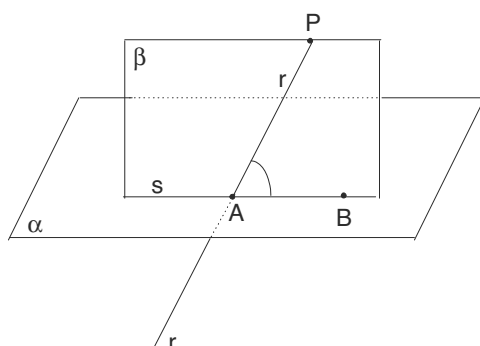
#### Proposição 4

Se uma reta é oblíqua a um dado plano, existe um único plano contendo a reta e perpendicular a esse plano.

Podemos agora definir o ângulo entre uma reta e um plano.

#### Definição 1

Se uma reta é perpendicular a um plano, dizemos que eles formam um ângulo de  $90^\circ$ . Se  $r$  é uma reta oblíqua a um plano  $\alpha$ , e  $\beta$  é o plano contendo  $r$  e perpendicular a  $\alpha$ , definimos o ângulo entre  $r$  e  $\alpha$  como sendo o ângulo entre  $r$  e  $s = \alpha \cap \beta$  (**Figura 21.7**).



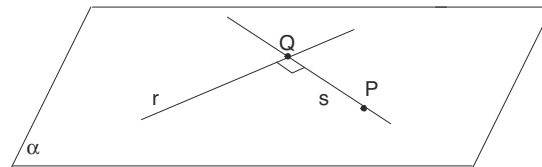
**Figura 21.7:** O ângulo entre  $r$  e  $\alpha$  é o ângulo entre  $r$  e  $s$ .

## Distâncias no espaço

Como você deve se lembrar, a distância entre dois pontos no plano é o comprimento do segmento de reta que une os dois pontos. Essa mesma forma de calcular a distância entre dois pontos também é usada para pontos no espaço. Vamos agora definir a distância entre ponto e reta e entre ponto e plano.

Definição 2

Considere um ponto  $P$  e uma reta  $r$ . Se  $P \in r$ , a distância de  $P$  a  $r$  é zero. Se  $P \notin r$ , seja  $\alpha$  o plano que contém  $r$  e  $P$ , e seja  $s$  a única reta de  $\alpha$  que passa por  $P$  e é perpendicular a  $r$ . Seja  $Q = r \cap s$ . A distância de  $P$  a  $r$  é definida como a medida do segmento  $PQ$  (**Figura 21.8**).

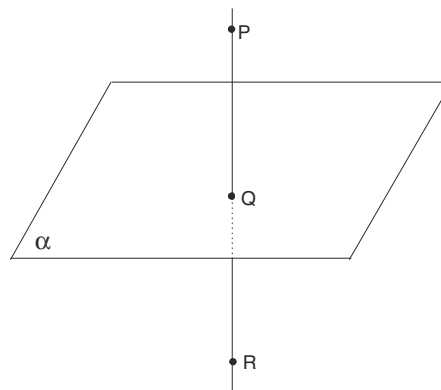


**Figura 21.8:** Distância de ponto a reta.

Observe que  $Q$  é o ponto de  $r$  mais próximo de  $P$ . Em outras palavras, tem-se  $m(PR) > m(PQ)$  para qualquer outro ponto  $R$  na reta  $r$ .

Definição 3

Considere um ponto  $P$  e um plano  $\alpha$ . Se  $P \in \alpha$ , a distância de  $P$  a  $\alpha$  é zero. Se  $P \notin \alpha$ , seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $\alpha$ . A distância de  $P$  a  $\alpha$  é definida como a medida do segmento  $PQ$  (veja a **Figura 21.9**).



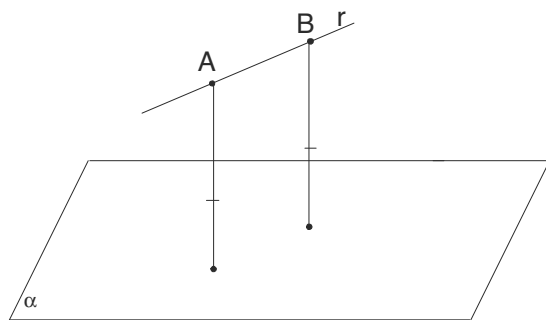
**Figura 21.9:** Distância de ponto a reta.

Como vimos no exercício 9 da Aula 20, o ponto  $Q$  é o ponto de  $\alpha$  mais próximo de  $P$ .

Definiremos, a seguir, a distância de reta a plano e a distância de plano a plano, que são bastante intuitivas. Ao final desta aula definiremos a distância entre duas retas no espaço, o que é um conceito um pouco mais elaborado.

**Definição 4**

Considere uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$ . Se  $r$  intersecta  $\alpha$ , a distância entre  $r$  e  $\alpha$  é zero. Se  $r$  não corta  $\alpha$ , ou seja,  $r // \alpha$ , segue pelo exercício 11 da Aula 20 que, para quaisquer pontos  $A$  e  $B$  em  $r$ , a distância de  $A$  a  $\alpha$  é igual à distância de  $B$  a  $\alpha$ . Definimos a distância de  $r$  a  $\alpha$  como sendo a distância de qualquer ponto de  $r$  a  $\alpha$ . Veja a **Figura 21.10**.



**Figura 21.10:** Distância de reta a plano.

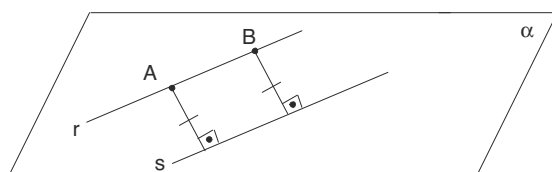
**Definição 5**

Considere dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ . Se  $\alpha$  intersectar  $\beta$ , a distância de  $\alpha$  a  $\beta$  é zero. Se  $\alpha$  é paralelo a  $\beta$ , segue do exercício 10 da Aula 20 que, dados dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer do plano  $\alpha$ , a distância de  $A$  a  $\beta$  é igual à distância de  $B$  a  $\beta$ , ou seja, esse valor não depende do ponto escolhido. A distância de  $\alpha$  a  $\beta$  é definida como a distância de um ponto qualquer de  $\alpha$  a  $\beta$  (ou vice-versa).

Vamos agora definir a distância entre duas retas. O caso mais simples é quando as duas retas em questão estão em um mesmo plano: são concorrentes ou paralelas. Veremos então esses dois casos primeiro.

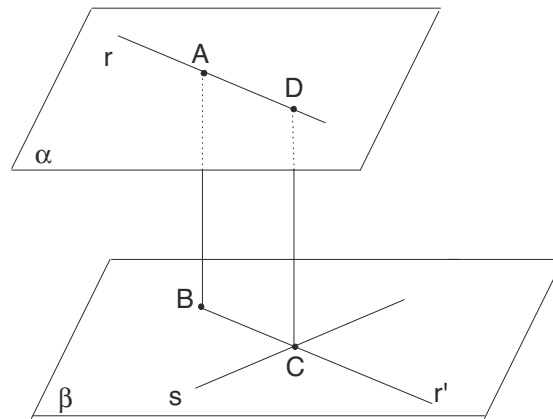
**Definição 6**

Se duas retas são concorrentes, a distância de uma a outra é zero. Se duas retas  $r$  e  $s$  são paralelas, mostra-se (veja exercício 12) que dados quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  de  $r$ , a distância entre  $A$  e  $s$  é igual à distância entre  $B$  e  $s$ , ou seja, esse valor não depende do ponto (veja a **Figura 21.11**). Nesse caso, a distância de  $r$  a  $s$  é definida como a distância de um ponto qualquer de  $r$  a  $s$ .



**Figura 21.11:** Distância entre retas paralelas.

Suponha agora que  $r$  e  $s$  sejam retas reversas. Sabemos, da proposição 19, da aula 19, que existem planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $r \subset \alpha$  e  $s \subset \beta$ . Tome um ponto  $A \in r$ , e seja  $B$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  ao plano  $\beta$ . Seja  $r'$  a reta paralela a  $r$  passando por  $B$ . A reta  $r'$  corta  $s$  (por quê?) em um ponto que chamaremos  $C$ . Veja a **Figura 21.12**. Trace a reta paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$  passando por  $C$ . Essa reta corta  $r$  (por quê?) em um ponto que chamaremos  $D$ , também indicado na **Figura 21.12**. Temos que a reta  $\overleftrightarrow{CD}$  é perpendicular aos planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ , pois  $\overleftrightarrow{CD}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$ .



**Figura 21.12:** A distância de  $r$  a  $s$  é  $m(CD)$ .

Podemos provar (veja exercício 13 desta aula) que o segmento  $CD$  é o único, dentre aqueles que ligam um ponto de  $r$  a um ponto de  $s$ , que é perpendicular a  $r$  e a  $s$  ao mesmo tempo. Além disso, ele é o de menor comprimento, ou seja,  $m(CD) < m(C'D')$ , para quaisquer pontos  $C' \in s$  e  $D' \in r$  (veja o exercício 14). Isso motiva a seguinte definição:

**Definição 7**

Se  $r$  e  $s$  são retas reversas, a distância de  $r$  a  $s$  é a medida do único segmento com extremos em  $r$  e  $s$  que é perpendicular a  $r$  e a  $s$ .

**Resumo**

Nesta aula você aprendeu...

- Como calcular ângulos entre planos.
- Como calcular ângulos entre retas e planos.
- Como calcular distâncias entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre reta e plano, entre planos e entre retas.



## Exercícios

- Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.
  - Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
  - Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são perpendiculares entre si.
  - Se uma reta e um plano são paralelos, então todo plano perpendicular ao plano dado é perpendicular à reta.
  - Se uma reta é oblíqua a um de dois planos paralelos, então ela é oblíqua ao outro.
  - Não existem quatro retas perpendiculares duas a duas.
- Se um plano  $\gamma$  é perpendicular a dois planos secantes  $\alpha$  e  $\beta$ , mostre que  $\gamma$  é perpendicular à reta de interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$ .
- Dados um plano  $\alpha$  e uma reta  $r$  perpendicular a  $\alpha$ , mostre que existem infinitos planos contendo  $r$ .
- Se uma reta  $r$  está contida em um plano  $\alpha$  e  $s$  é perpendicular a  $\alpha$ , mostre que existe um único plano contendo  $s$  e perpendicular a  $r$ .
- Se dois planos são paralelos, prove que todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
- Se uma reta  $r$  é paralela a um plano  $\alpha$ , prove que todo plano perpendicular a  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .
- Se uma reta  $r$  é paralela a um plano  $\alpha$ , prove que existe um único plano contendo  $r$  e perpendicular a  $\alpha$ .
- Prove que o ângulo entre uma reta e um plano é igual ao ângulo entre essa reta e qualquer plano paralelo ao plano dado.
- Se  $A$  e  $B$  são pontos distintos, prove que o conjunto de pontos do espaço que são equidistantes de  $A$  e  $B$  é um plano. Além disso, esse plano passa pelo ponto médio do segmento  $AB$  e é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- Seja  $ABC$  um triângulo que não intersecta um plano  $\alpha$ , e sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as distâncias de, respectivamente,  $A$ ,  $B$  e  $C$  ao plano  $\alpha$ . Prove que a distância do baricentro de  $ABC$  ao plano  $\alpha$  é dada por  $\frac{a+b+c}{3}$ .

11. Seja  $r$  uma reta que corta um plano  $\alpha$ , e seja  $s$  uma reta contida em  $\alpha$ . Prove que o ângulo entre  $r$  e  $s$  é maior ou igual ao ângulo entre  $r$  e  $\alpha$ .
12. Prove que retas paralelas são equidistantes. Mais precisamente, se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, prove que a distância de  $A$  a  $s$  é igual à distância de  $B$  a  $s$ , quaisquer que sejam  $A$  e  $B$  pertencentes a  $r$ .
13. Se  $r$  e  $s$  são retas reversas, prove que existe somente um segmento com extremos em  $r$  e em  $s$  que é perpendicular a  $r$  e a  $s$ .
14. Sejam  $r$  e  $s$  retas reversas e seja  $CD$  ( $C \in r$  e  $D \in s$ ) o único segmento com extremos em  $r$  e em  $s$  que é perpendicular a  $r$  e a  $s$ . Prove que  $m(CD) < m(C'D')$ , quaisquer que sejam  $C' \in s$  e  $D' \in r$ .
15. Prove a proposição 3 desta aula.
16. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  planos que se cortam e seja  $r$  a reta de interseção entre eles. Tome pontos  $A$  e  $A'$  em  $r$  e sejam  $\gamma$  e  $\gamma'$  os planos perpendiculares a  $r$  e que passam por  $A$  e  $A'$ , respectivamente. Sejam  $s = \gamma \cap \alpha$ ,  $t = \gamma \cap \beta$ ,  $s' = \gamma' \cap \alpha$  e  $t' = \gamma' \cap \beta$  (veja a **Figura 21.12**). Prove que o ângulo entre  $s$  e  $t$  é igual ao ângulo entre  $s'$  e  $t'$ .

**Sugestão:** Prove que  $s // s'$  e  $t // t'$ . Inspire-se no exercício 12 da Aula 20.

17. (UFF,1996) Considere dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ , secantes e não-perpendiculares, e um ponto  $P$  não pertencente a  $\alpha$  nem a  $\beta$ . Pode-se afirmar que:
  - (a) Toda reta que passa por  $P$  e é paralela a  $\alpha$  também é paralela a  $\beta$ .
  - (b) Toda reta que passa por  $P$  e intersecta  $\alpha$  também intersecta  $\beta$ .
  - (c) Se um plano contém  $P$  e intersecta  $\alpha$  então ele intersecta  $\beta$ .
  - (d) Existe um plano que contém  $P$  e é perpendicular a  $\alpha$  e a  $\beta$ .
  - (e) Existe um plano que contém  $P$  e é paralelo a  $\alpha$  e a  $\beta$ .