Aula 20 – Ângulos no espaço - parte I

Objetivos

- Entender o significado de ângulo entre duas retas no espaço.
- Identificar quando duas retas são perpendiculares no espaço.
- Identificar quando uma reta é perpendicular a um plano.

Introdução

Nesta aula veremos o conceito de ângulo entre duas retas, para retas no espaço (concorrentes, paralelas ou reversas). Veremos também o conceito de perpendicularismo entre reta e plano. Na próxima aula, continuaremos nossa abordagem do conceito de ângulos no espaço estudando o ângulo entre planos, o perpendicularismo entre planos e o ângulo entre reta e plano. Dedicaremos duas aulas a esse assunto porque a idéia de ângulo entre objetos no espaço é um pouco mais elaborada que no plano.

Ângulo e perpendicularismo entre retas

Como duas retas concorrentes estão sempre num mesmo plano, definimos o *ângulo* entre as retas concorrentes r e s como a medida do menor ângulo entre os quatro determinados por r e s. Se todos os ângulos determinados por r e s forem congruentes, dizemos que r e s são perpendiculares, e que o ângulo entre elas é 90^o. Veja as duas situações na **Figura 20.1**.

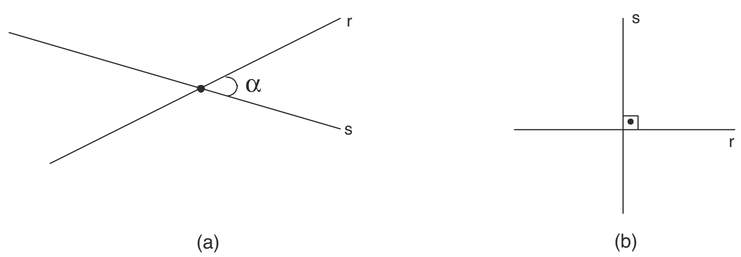

Figura 20.1: (a) α é o ângulo entre as retas concorrentes. (b) Retas perpendiculares.

Caso r e s sejam paralelas, dizemos que o ângulo entre elas é de 0^o.

Para definir o ângulo entre retas reversas, precisamos recorrer a uma pequena construção.

Sejam r e s retas reversas, e P um ponto qualquer. Por P trace as retas r' e s' paralelas a r e s, respectivamente. O ângulo entre r e s é definido como o ângulo entre as retas concorrentes r' e s' (veja a **Figura 20.2**).

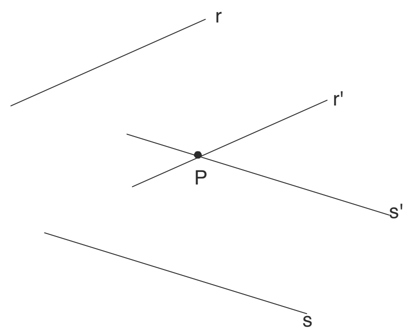

Figura 20.2: Ângulo entre retas.

Prova-se (veja exercício 12 desta aula) que o ângulo encontrado é sempre o mesmo, não dependendo do ponto P escolhido na construção. Poderíamos inclusive escolher P em r (ou em s), tomando nesse caso $r' = r$ (respectivamente $s' = s$).

Dizemos que duas retas (concorrentes ou reversas) são perpendiculares se o ângulo entre elas for 90^o.

Proposição 1

Se r é perpendicular a s, e s é paralela a t, então r é perpendicular a t.

Prova:

Tome um ponto qualquer $A \in t$ e, por ele, trace a reta r' paralela a r (**Figura 20.3**).

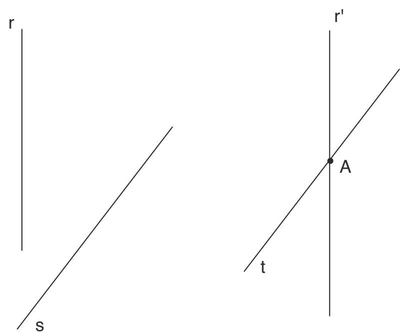

Figura 20.3: r' paralela a r.

Como r e s são perpendiculares, segue da definição de ângulo entre retas que r' é perpendicular a t. Novamente pela definição de ângulo entre retas, tem-se que o ângulo entre r e t é igual ao ângulo entre r' e t. Logo, r é perpendicular a t. Q.E.D.

Perpendicularismo entre reta e plano

Dizemos que uma reta é *perpendicular a um plano se ela for perpendicular a todas as retas contidas nesse plano. Caso contrário, dizemos que ela é* oblíqua ao plano. Na **Figura 20.4**, r é perpendicular a α e s é oblíqua a α. Usaremos o símbolo $\perp$ para indicar o perpendicularismo entre retas, entre reta e plano e, mais à frente, entre planos. Por exemplo, na **Figura 20.4**, temos $r \perp \alpha$.

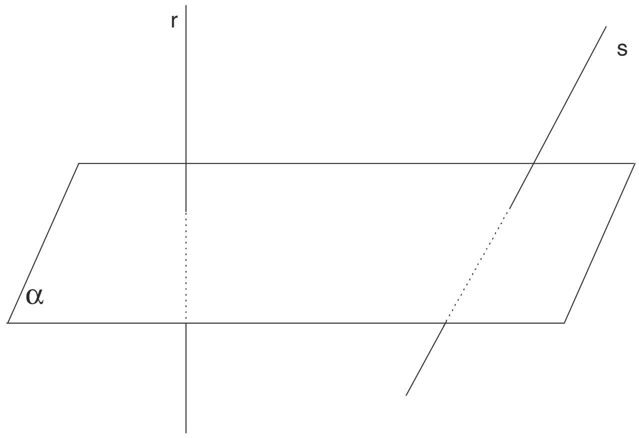

Figura 20.4: Reta perpendicular e reta oblíqua a α.

O seguinte resultado é bastante usado para se provar que uma reta é perpendicular a um plano.

Proposição 2
Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Prova:

Suponha que uma reta r seja perpendicular a duas retas concorrentes s e t contidas em um plano α. Queremos provar que $r \perp \alpha$, ou seja, que r é perpendicular a qualquer reta de α. Seja A o ponto de encontro entre s e t. Temos dois casos a considerar: quando r contém o ponto A, e quando r não contém o ponto A.

1^o *caso* - A reta r contém o ponto A.

Nesse caso, considere dois pontos B e C sobre r, em lados opostos de A, tais que $AB \equiv AC$. Tome um ponto $D \neq A$ em s e pontos E e F em t, localizados em lados opostos de A (**Figura 20.5**).

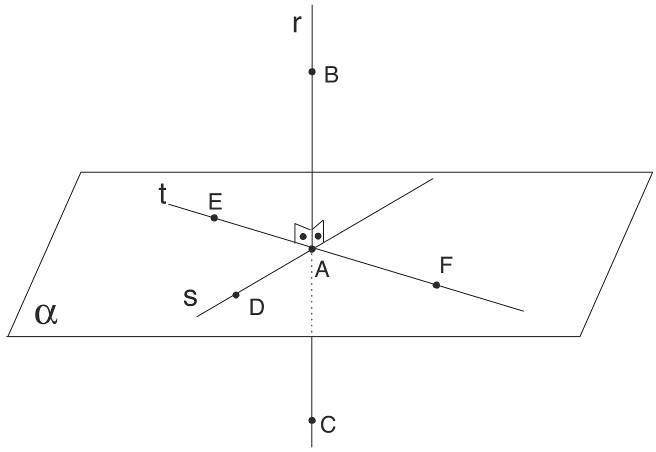

Figura 20.5: Prova de que r é perpendicular a α.

Seja u uma reta de α passando por A, distinta de s e t. Temos que u intersecta ED ou u intersecta DF. Consideraremos essa última opção, sendo que no outro caso a prova é análoga. Devemos agora mostrar que a reta r é perpendicular à reta u.

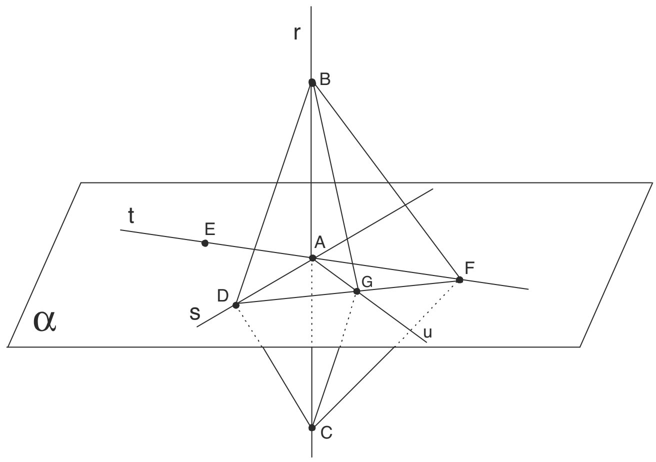

Figura 20.6: Construção do triângulo BGC.

Trace os segmentos BD, BF, CD, CF e DF. Seja $G = u \cap DF$. Trace BG e CG (**Figura 20.6**).

Vamos mostrar que o triângulo BGC é isósceles. Como $AB \equiv AC$ e $B\hat{A}D$ é reto (pois $r \perp s$), tem-se que $BD \equiv CD$. Da mesma forma, prova-se que $BF \equiv CF$. Segue de L.L.L. que $BDF \equiv CDF$, de onde se obtém que $B\hat{D}G \equiv C\hat{D}G$. Usando o caso de congruência L.A.L., conclui-se que $BG \equiv CG$, ou seja, o triângulo BCG é isósceles com base BC. Como GA é a mediana relativa a BC (pois $AB \equiv AC$), e BC é a base do triângulo isósceles BCG, temos que $\overleftrightarrow{GA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, ou seja, $r \perp u$.

Provamos então que r é perpendicular a qualquer reta de α passando por A. Se m é uma reta de α que não passa por A, consideremos a reta m' paralela a m passando por A (como na **Figura 20.7**). Como foi provado, $r \perp m'$, e já que $m // m'$, segue da proposição anterior que $r \perp m$.

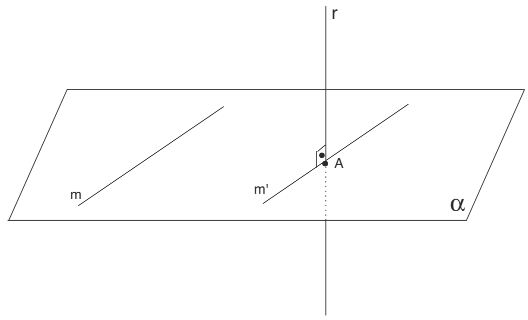

Figura 20.7: As retas m e m'.

2^o *caso* - A reta r não contém o ponto A.

Nesse caso, chame de r' a reta paralela a r passando por A. Como $r \perp s$ e $r \perp t$, segue da proposição anterior que $r' \perp s$ e $r' \perp t$ (**Figura 20.8**).

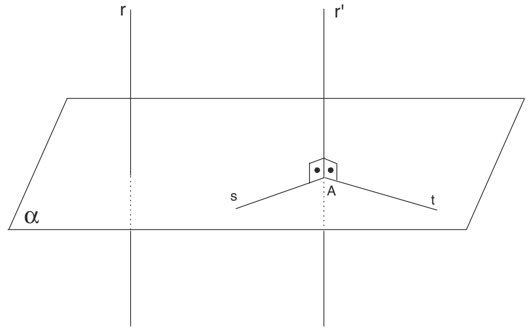

Figura 20.8: As retas r e r'.

Pelo 1^o caso, já provado, tem-se que r' é perpendicular a todas as retas de α. Como $r // r'$, segue que r também é perpendicular a todas as retas de α. Q.E.D.

Apresentamos a seguir quatro proposições, cujas provas serão colocadas nos exercícios desta aula.

Proposição 3

Se uma reta r é perpendicular a um plano α e paralela a uma reta s, então s é perpendicular a α.

Proposição 4
Se uma reta r é perpendicular a um plano α e α é paralelo a um plano β, então r é perpendicular a β.

Proposição 5
Se duas retas distintas r e s são perpendiculares a um plano α, então r é paralela a s.

Proposição 6
Se dois planos distintos α e β são perpendiculares a uma reta r, então α é paralelo a β.

Terminaremos esta aula com dois resultados que falam de perpendicularismo: existe um único plano perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, e existe uma única reta perpendicular a um plano dado passando por um ponto dado.

Proposição 7
Dados uma reta r e um ponto P, existe um único plano passando por P e perpendicular a r.

Prova:

Temos que provar duas coisas. A primeira é que existe um plano passando por P e perpendicular a r. Chamamos isso de "prova da existência". A segunda é que esse plano é o único com essas propriedades. Chamamos isso de "prova da unicidade".

Para provar a existência, considere dois planos distintos, α e β, contendo r, e tome um ponto $A \in r$. Seja s a reta de α passando por A e perpendicular a r (note que no plano já provamos a existência e a unicidade da perpendicular passando por um ponto) e seja t a reta de β passando por A e perpendicular a r. Chame de γ ao plano contendo s e t (**Figura 20.9**).

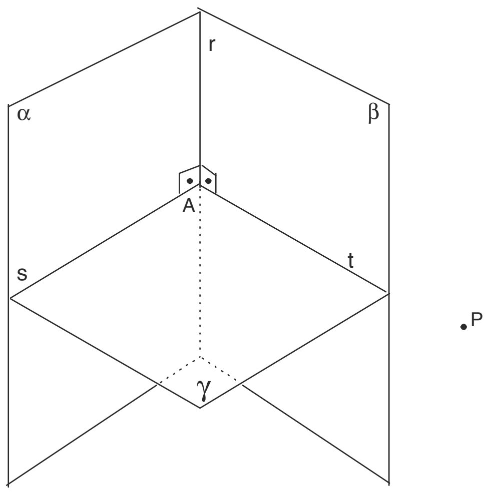

Figura 20.9: Prova da proposição 21.

A reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de γ, portanto $r \perp \gamma$. Se o ponto P estiver em γ, a demonstração está concluída. Se não, chame de γ' o único plano paralelo a γ passando por P. Pela proposição 4 desta aula concluímos que $r \perp \gamma'$, e fica provada a existência.

Para provar a unicidade, suponha que existam dois planos distintos, γ_1 e γ_2, passando por P e perpendiculares a r. A proposição 6 garante que $\gamma_1 // \gamma_2$; ou seja, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. Mas isso é uma contradição, pois ambos os planos passam pelo ponto P. Portanto existe um único plano passando por P e perpendicular a r. Q.E.D.

Proposição 8

Dados um plano α e um ponto P, existe uma única reta passando por P e perpendicular a α.

Prova:

Provaremos primeiro a existência. Tome uma reta $r \subset \alpha$ e um ponto $A \in r$. Chame de s a reta de α passando por A e perpendicular a r. Sejam β o plano passando por A e perpendicular a r e γ o plano passando por A e perpendicular a s. Chame de t a interseção entre β e γ (**Figura 20.10**).

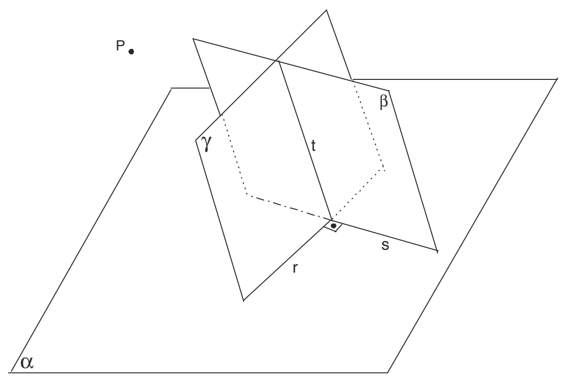

Figura 20.10: Prova da proposição 8.

Como $s \perp \gamma$ e $t \subset \gamma$, tem-se $s \perp t$. Da mesma forma, como $r \perp \beta$ e $t \subset \beta$, tem-se $r \perp t$. Assim, a reta t é perpendicular a duas retas concorrentes contidas no plano α, e portanto $t \perp \alpha$. Se $P \in t$, a prova da existência está terminada. Se não, chame de t' a reta paralela a t passando por P. A proposição 3, desta aula, assegura que $t' \perp \alpha$. Fica concluída assim a prova da existência.

Para provar a unicidade, suponha que existem duas retas distintas t_1 e t_2 passando por P e perpendiculares a α. Da proposição 5, obtemos que $t_1 // t_2$, ou seja, $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. Mas isso é uma contradição, pois as duas retas passam pelo ponto P. Logo existe uma única reta passando por P e perpendicular a α. Q.E.D.

Note que as provas das duas proposições anteriores são muito parecidas. Na verdade, muitas das proposições têm enunciados parecidos, trocando retas por planos. Ao reler esta aula, faça uma lista relacionando cada enunciado com outros que sejam semelhantes. Recorde também os enunciados semelhantes da parte de geometria plana (Aula 5).

Vamos concluir esta aula com uma definição.

Definição 1

Dados um plano α e um ponto P fora de α, seja Q o ponto em que a perpendicular a α passando por P intersecta α. O ponto Q é chamado de *pé da perpendicular baixada de P ao plano α*. O ponto R da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que Q está entre P e R e $PQ \equiv QR$ é chamado de reflexo de P relativo ao plano α (**Figura 20.11**).

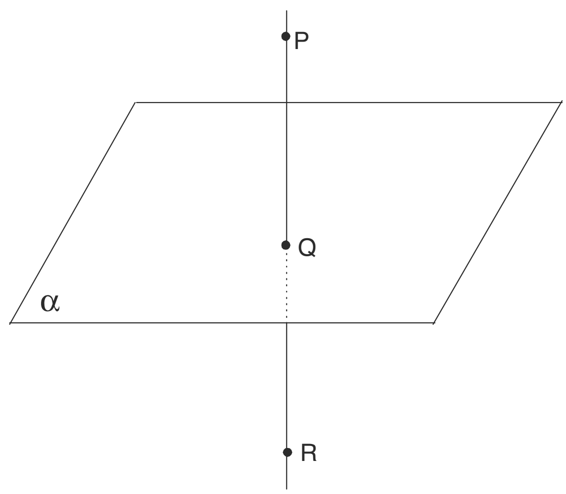

Figura 20.11: Q é o pé da perpendicular. R é o reflexo de P relativo a α.

Prova-se que Q é o ponto de α mais próximo de P (veja o exercício 9 desta aula).

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Conceito de ângulo entre retas.
- Perpendicularidade entre reta e reta e entre reta e plano.

Exercícios

1. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

   - Se r e s são perpendiculares a t, então r e s são paralelas.
   - Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
   - Se duas retas reversas são paralelas a um plano, então toda reta perpendicular a elas é perpendicular ao plano.
   - Se duas retas paralelas entre si são paralelas a um plano, então toda reta perpendicular a elas é perpendicular ao plano.
   - Dadas duas retas reversas, sempre existe um plano perpendicular a ambas.
   - Se $r//s$, $\alpha \perp r$ e $\beta \perp s$, então $\alpha // \beta$.

2. Se r é perpendicular a um plano α e s é perpendicular a r, prove que $s \subset \alpha$ ou s é paralela a α.

3. Dois triângulos ABC e DBC são isósceles de base BC e estão situados em planos distintos. Prove que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

4. Na **Figura 20.12**, r é perpendicular a α e $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a s. Prove que s é perpendicular a t.

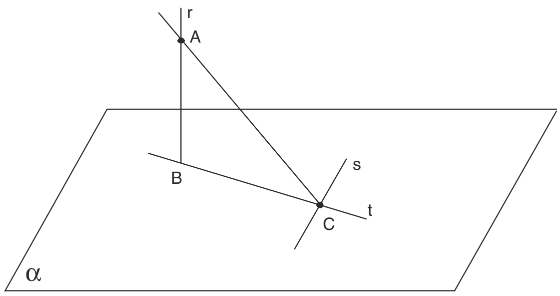

Figura 20.12: Exercício 4.

5. Prove a proposição 3.

6. Prove a proposição 4.

7. (Prova da proposição 5) Suponha que duas retas distintas r e s sejam perpendiculares a um plano α. Se r e s não são paralelas, então r e

s são concorrentes ou reversas. Se r e s são concorrentes, digamos em um ponto A, chame de γ o plano contendo r e s. Prove que $\alpha \cap \gamma$ é uma reta. Seja $t = \alpha \cap \gamma$ (veja a **Figura 20.13**).

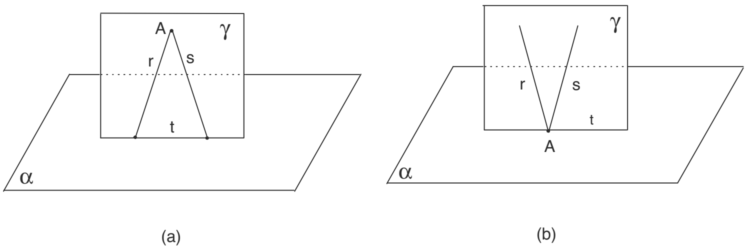

Figura 20.13: (a) A não pertence a α. (b) A pertence a α.

Prove que r e s são perpendiculares a t. O plano γ contém, assim, duas retas perpendiculares a t e passando por A, o que é um absurdo (justifique). Esse absurdo prova que r e s não podem ser concorrentes. Se r e s são reversas, tome um ponto $P \in r$ e seja s' a reta paralela a s passando por P. Prove que r e s' são concorrentes e que s' é perpendicular a α. Mas já provamos na primeira parte que duas retas concorrentes não podem ser ambas perpendiculares a α. Isso prova que r e s também não podem ser reversas. Portanto, r e s são paralelas.

8. **(Prova da proposição 6)**. Suponha que dois planos distintos α e β sejam perpendiculares a uma reta r. Vamos provar por contradição que α e β são paralelos. Suponha que α e β não sejam paralelos e seja t a reta de intersecção entre eles. Há duas possibilidades:

   1^a possibilidade: r não intersecta t.

   2^a possibilidade: r intersecta t.

   Se r não intersectar t, tome um ponto $P \in t$ e chame de γ o plano que contém r e P.

   Se r intersectar t, tome um ponto $Q \notin t$ sobre α e chame de γ o plano que contém r e Q (veja as duas possibilidades na **Figura 20.14**). Em qualquer uma das possibilidades, prove que $a = \gamma \cap \alpha$ e $b = \gamma \cap \beta$ são retas concorrentes. Prove também que $r \perp a$ e $r \perp b$. Mas isso é uma contradição (justifique). Portanto, α e β são paralelos.

9. Sejam α um plano, $P \notin \alpha$ e Q o pé da perpendicular baixada de P a α. Prove que Q é o ponto de α mais próximo de P. Mais precisamente, prove que $m(PA) > m(PQ)$, para todo $A \neq Q$ em α.

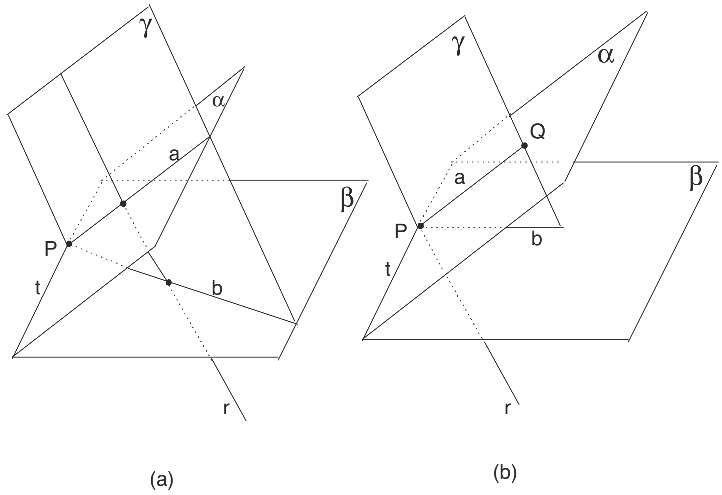

Figura 20.14: (a) r não intersecta t. (b) r intersecta t.

10. **(Planos paralelos são equidistantes)** Sejam α e β planos paralelos e sejam A e B dois pontos de α. Prove que $m(AA') = m(BB')$, sendo A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de, respectivamente, A e B ao plano β.

11. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que, para quaisquer dois pontos A e B em r, $m(AA') = m(BB')$, sendo A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de, respectivamente, A e B ao plano α.

12. Sejam r e s retas reversas e sejam P e Q pontos distintos. Denote por r' e s' as retas que passam por P e são paralelas a, respectivamente, r e s. Denote por r'' e s'' as retas que passam por Q e são paralelas a, respectivamente, r e s. Prove que o ângulo entre r' e s' é igual ao ângulo entre r'' e s''.

    Sugestão: Se r', s', r'' e s'' são coplanares, o resultado é conseqüência do fato que, se duas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes (veja a **Figura 20.15**).

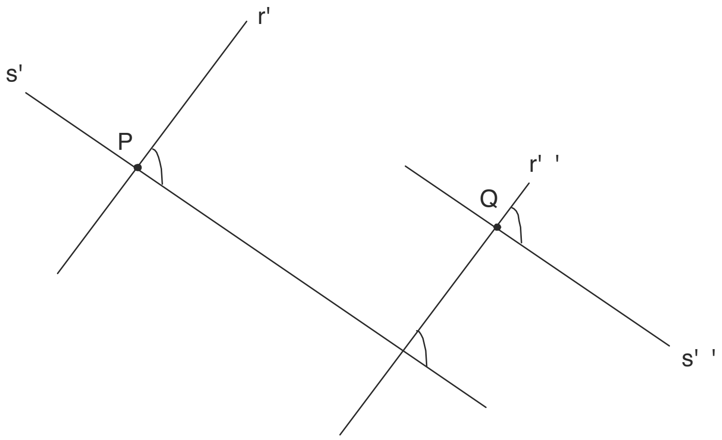

Figura 20.15: Exercício 12.

Se r', s', r'' e s'' não são coplanares, chame de α o plano que contém r' e s' e de β o plano que contém r'' e s''. Prove que α é paralelo a β. Tome pontos $A' \neq P$ em r' e $B' \neq P$ em s' e, por esses pontos, trace retas paralelas à reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Chame de A'' e B'' os pontos em que essas retas cortam β (veja **Figura 20.16**).

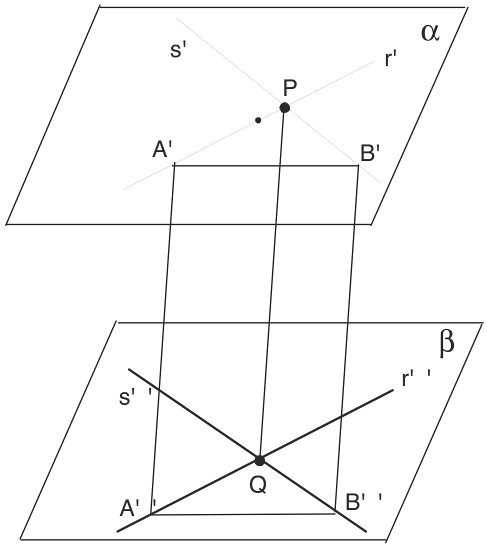

Figura 20.16: Exercício 12.

13. Sejam α um plano e r uma reta oblíqua a α. Chame de A o ponto em que r intersecta α. Prove que existe uma única reta contida em α, passando por A que é perpendicular a r.