Aula 18 – Paralelismo no espaço

Objetivos

- Identificar paralelismo entre retas.
- Identificar paralelismo entre reta e plano.

Introdução

Neste módulo iniciaremos o estudo da Geometria Espacial. O que fizemos até aqui foi estudar as propriedades das figuras que estão contidas em um plano: triângulos, círculos etc. Vimos também como se relacionam as retas, as semi-retas e os segmentos de reta quando estão contidos em um mesmo plano. A partir de agora, veremos como as retas, semi-retas e segmentos podem estar dispostos no espaço. Veremos também os sólidos geométricos, que são as "figuras" espaciais, e algumas de suas propriedades.

Compare os axiomas do quadro com os axiomas de incidência da aula 1.

No início do nosso estudo de Geometria Plana, partimos de um conjunto de afirmações elementares - os axiomas - e a partir deles provamos outras propriedades menos elementares - as proposições e os teoremas. Aqueles axiomas das aulas iniciais também serão utilizados no estudo da Geometria Espacial que faremos aqui. Além deles, utilizaremos quatro outros, que são:

- Por três pontos não colineares passa um único plano.
- Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção entre eles é uma reta.
- Qualquer que seja o plano, existem infinitos pontos nesse plano e infinitos pontos fora dele.
- Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano.

Por que às vezes temos que colocar calços em mesas de quatro pernas, e isso nunca é necessário em mesas de três pernas?

Para melhor entender as idéias expressas nesses axiomas, você pode utilizar materiais como capas de caderno ou folhas de isopor, representando planos, e lápis ou palitos de churrasco, representando retas. O desenho, que já não servia antes para tirar conclusões, agora tem uma dificuldade adicional: para desenhar objetos que não são planos, temos que recorrer a técnicas mais refinadas de desenho, para dar a idéia da posição dos elementos do desenho no espaço. A utilização de objetos como os citados poderá ser mais útil nesse primeiro momento.

Observe que um plano pode estar posicionado no espaço de várias maneiras. Por exemplo, imagine uma tábua representando um pedaço de plano. Você pode colocá-la deitada no chão, em pé, inclinada de várias maneiras, pode também arrastá-la para outros lugares... Isso dá a idéia de que há infinitos planos no espaço (como há infinitas retas em um plano). Quando destacamos algum deles é porque estamos interessados em alguma propriedade especial.

Como uma primeira conseqüência dos novos axiomas, mostraremos que por duas retas concorrentes passa um único plano. Sejam r e s retas concorrentes e seja A o seu ponto de interseção. Tome um ponto $B \neq A$ em r e um ponto $C \neq A$ em s (veja a **Figura 18.1**).

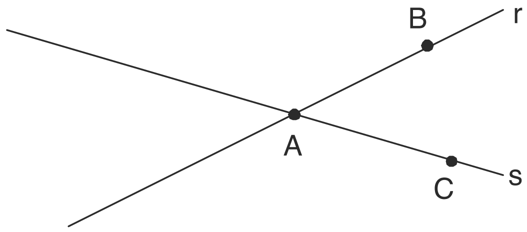

Figura 18.1: Retas concorrentes.

Os pontos A, B e C são não colineares, e, portanto, existe um único plano que os contém. Chamemos esse plano de α. Como α contém dois pontos distintos de r (A e B), então a reta r está contida no plano α. Da mesma forma, como A e C pertencem a α, tem-se $s \subset \alpha$. Se houvesse um outro plano contendo as retas r e s, ele também conteria os pontos A, B e C, mas só existe um plano contendo esses três pontos, que é α (veja a **Figura 18.2**). Provamos assim que:

Proposição 1

Por duas retas concorrentes passa um único plano.

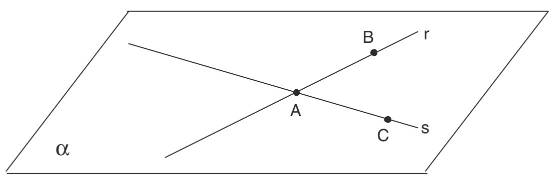

Figura 18.2: Plano contendo r e s.

Quando uma coleção de retas, de pontos, de retas e pontos, etc. está contida em um mesmo plano, dizemos que os objetos da coleção são *coplanares*. Por exemplo, duas retas concorrentes são coplanares (como acabamos de ver) e, de acordo com o primeiro axioma desta aula, três pontos são coplanares. Observe que três pontos são coplanares, mesmo que sejam colineares. Nesse caso existem infinitos planos que os contêm. Veremos, também, no exercício 3, que uma reta e um ponto são sempre coplanares.

Paralelismo entre retas no espaço

A noção de retas paralelas no espaço é um pouco mais elaborada que no plano. Se duas retas estão no mesmo plano, basta que não se intersectem para que sejam paralelas. Já no espaço, se duas retas não se encontram, elas podem estar em posições que não concordam com a idéia intuitiva que nós temos de paralelismo. Por exemplo, imagine uma mesa de estudo. Suponha que a reta r está posicionada como a beirada da frente do tampo superior da mesa, e a reta s está posicionada como a perna de trás da mesa. Então as retas r e s não se intersectam (a não ser que a mesa que você imaginou seja muito esquisita...), mas não são o que gostaríamos de chamar de retas paralelas (veremos esse caso mais à frente). Por isso temos a seguinte definição:

Definição 1
Duas retas são chamadas paralelas se elas não se intersectam e se existe um plano que as contém (veja a **Figura 18.3**).

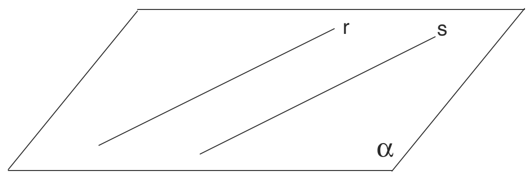

Figura 18.3: Retas paralelas.

Pode-se mostrar que, dadas duas retas paralelas, existe somente um plano que as contém (veja exercício 8 desta aula).

Considere uma reta r e um ponto $P \notin r$. Pode-se mostrar (veja exercício 3 desta aula) que existe um único plano que contém r e P. Chamemos esse plano de α. O quinto postulado de Euclides, que enunciamos no plano, garante que existe uma única reta $s \subset \alpha$ passando por P que não intersecta r (**Figura 18.4**).

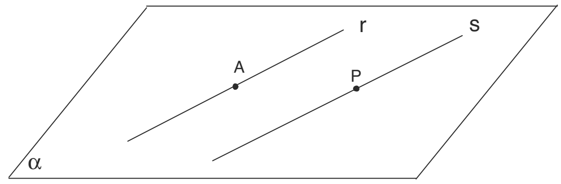

Figura 18.4: r e s são paralelas.

As retas r e s, por definição, são paralelas. Mostramos então que existe uma reta passando por P paralela a r quando esses objetos são considerados no espaço. Será que existe no espaço outra reta com essa propriedade? Sabemos que, no plano α, uma tal reta não existe, pois o quinto postulado garante a unicidade de tal reta no plano. Mostraremos que não existe, também fora do plano, outra reta paralela a r passando por P, ou seja, que o quinto postulado também vale no espaço.

Para isso, considere uma reta u paralela a r passando por P. Por definição de retas paralelas, existe um plano β que contém r e u. Logo, β contém r e P. Como só existe um plano que contém r e P, e α contém r e P, segue que $\beta = \alpha$ e, portanto, $u \subset \alpha$. Mas a única reta paralela a r passando por P dentro do plano α é a reta s e, portanto, $u = s$. Está assim provada a proposição a seguir.

Proposição 2

Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

Vamos voltar mais uma vez ao exemplo da mesa. Podemos colocá-lo matematicamente da seguinte maneira: considere o plano α contendo uma reta r e um ponto P (fora de r). Também considere um ponto Q fora de α, como na **Figura 18.5**. Ora, a interseção de $\overleftrightarrow{PQ}$ com o plano α contém apenas o ponto P. Como $r \subset \alpha$e $P \notin r$, temos que as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r não se intersectam. Veremos no exercício 19 desta aula, que essas retas também não são paralelas, porque não existe nenhum plano que contenha as duas. Retas assim são chamadas *reversas*.

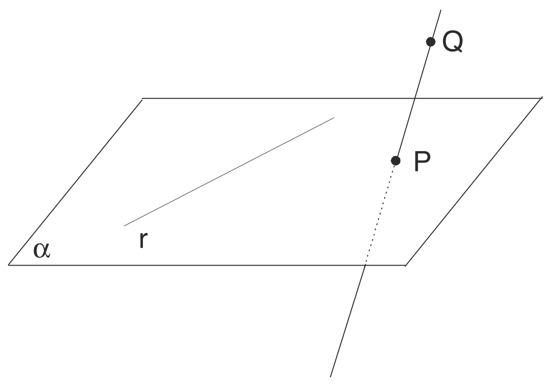

Figura 18.5: Retas reversas.

Definição 2
Duas retas são reversas se não existe nenhum plano que contenha as duas.

A próxima proposição trata de paralelismo de retas.

Proposição 3
Se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Prova:

Suponha que r e s são duas retas distintas, ambas paralelas a uma reta t. Queremos mostrar que r e s não se intersectam, e que existe um plano que contém as duas (essas duas condições significam que r e s são paralelas). Vejamos primeiro porque r e s não se intersectam.

Se existisse interseção entre as retas r e s, teria que ser apenas em um ponto, porque elas são distintas. Vamos chamar tal ponto de P. Sabemos que P não pertence a t (pois $P \in r$ e r é paralela a t). Temos então duas retas distintas paralelas a t e passando por P! Veja a **Figura 18.6**. Como mostramos anteriormente, isso é absurdo: por um ponto fora de t passa apenas uma paralela a t.

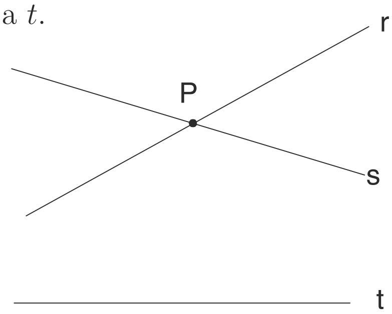

Figura 18.6: Prova da proposição 3.

Falta apenas mostrar que r e s são coplanares, ou seja, que existe um plano contendo as duas. Seja α o plano que contém as paralelas r e t, e β o plano que contém as paralelas s e t. Seja B um ponto da reta s. Existe um único plano, que chamaremos γ, que contém a reta r e o ponto B. Mostraremos que γ contém toda a reta s. Veja a **Figura 18.7**.

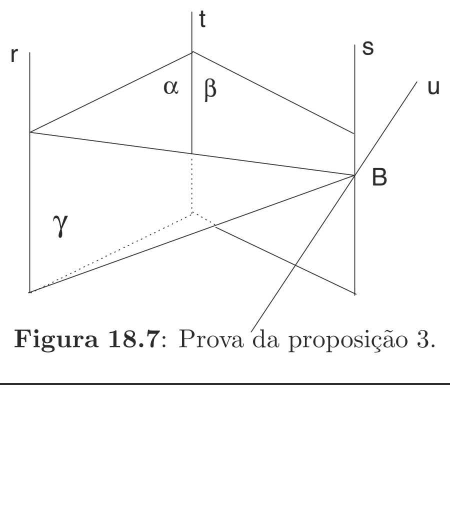

Figura 18.7: Prova da proposição 3.

Note que os planos β e γ são distintos e têm o ponto B em comum. Dois planos assim se intersectam em uma reta. Gostaríamos de afirmar que essa reta é s, mas ainda não sabemos. Por enquanto vamos chamá-la de u: a reta u está nos planos β e γ e contém o ponto B.

Os planos α e γ são distintos e têm a reta r em comum (ou seja, r contém os únicos pontos de interseção entre α e γ). Como r e t são paralelas, e t está contida em α, temos $t \cap \gamma = \emptyset$. Como $u \subset \gamma$, temos $u \cap t \subset \gamma \cap t = \emptyset$. Como u e t estão em β e não se encontram, u e t são retas paralelas.

Observe onde chegamos: a reta u é paralela à reta t e passa pelo ponto B. Mas s também passa por B e é paralela a t. Pela unicidade da paralela, obtemos $u = s$ (observe a **Figura 18.8**). Temos então que o plano γ contém as retas r e s (pois contém $u = s$). Como já provamos que r não intersecta s, concluimos que r e s são paralelas.

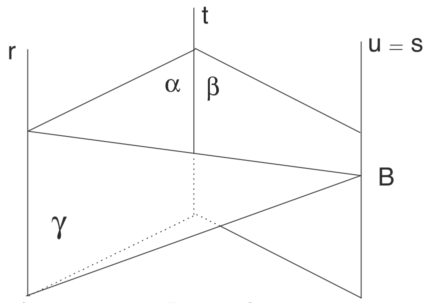

Figura 18.8: Prova da proposição 3.

Q.E.D.

Paralelismo entre reta e plano

Dizemos que uma reta e um plano são paralelos se eles não têm nenhum ponto em comum. Nesse caso dizemos também que a reta é paralela ao plano, e que o plano é paralelo à reta.

Uma calçada e um fio elétrico bem esticado estendido entre dois postes de mesma altura dão uma idéia de paralelismo entre reta e plano.

Suponhamos que uma reta r seja paralela a um plano α, e tomemos um ponto A qualquer de α. Vamos chamar de β o plano que contém r e A. Seja $s = \beta \cap \alpha$, como na **Figura 18.9**.

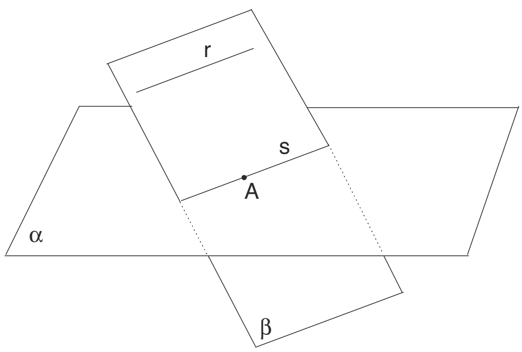

Figura 18.9: Retas paralelas r e s.

As retas r e s não se intersectam, pois $r \cap \alpha = \emptyset$. Como r e s estão contidas em β, segue que r e s são paralelas. Assim, provamos a proposição a seguir.

Proposição 4

Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta contida nesse plano.

Observe que obtivemos a reta s da **Figura 18.9** a partir de um ponto $A \in \alpha$. Variando o ponto A, obteremos outras retas paralelas a r, contidas no plano α. Na verdade, existem infinitas dessas retas. Veja a **Figura 18.10**.

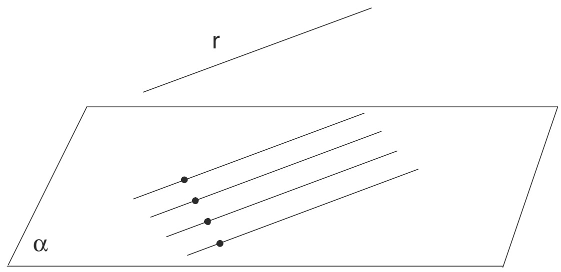

Figura 18.10: Prova da proposição 5.

O seguinte resultado é bastante utilizado para verificar se uma reta é paralela a um determinado plano:

Proposição 5

Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta desse plano, então ela é paralela ao plano.

Prova:

Seja r uma reta não contida em um plano α, e suponha que exista uma reta $s \subset \alpha$ paralela a r, como no enunciado da proposição. Queremos mostrar que r é paralela a α, ou seja, que $r \cap \alpha = \emptyset$.

Seja β o plano que contém as paralelas r e s. Como r não está em α, os planos α e β são distintos, e, conseqüentemente, $\alpha \cap \beta = s$ (veja a **Figura 18.11**).

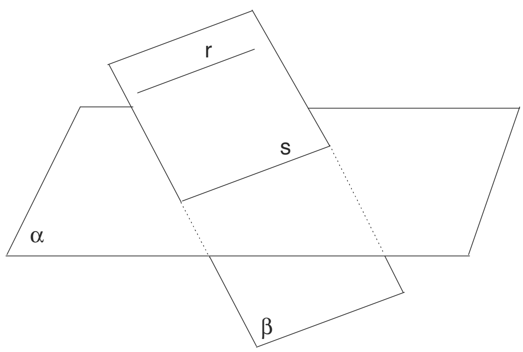

Figura 18.11: Planos α e β .

Se r cortasse α em um ponto A, esse ponto teria que estar na interseção de β e α, pois r está em β. Daí teríamos $A \in s$, o que não pode acontecer, pois r e s são paralelas. Logo r e α não se intersectam. Q.E.D.

Dizemos que dois planos são secantes quando eles se intersectam em uma reta. A prova da proposição a seguir será deixada como exercício.

Proposição 6

Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta de interseção entre α e β (veja a **Figura 18.12**).

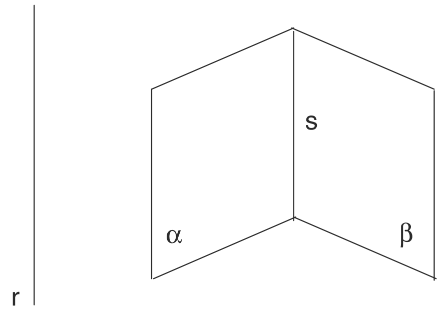

Figura 18.12: α e β paralelos a r.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O significado de paralelismo entre retas no espaço.
- O que são retas reversas.
- O significado de paralelismo entre reta e plano.
- Alguns resultados relacionando o paralelismo entre retas com o paralelismo entre reta e plano.

Exercícios

1. Considere três pontos A, B e C, distintos dois a dois. Qual é o maior número de retas que eles podem determinar?
2. Considere quatro pontos A, B, C e D, distintos dois a dois. Qual é o maior número de retas que eles podem determinar?
3. Prove que, dados uma reta r e um ponto $P \notin r$,

   a) existe um único plano contendo r e P.

   b) todas as retas que passam por P e cortam r estão em um mesmo plano.

4. Se três retas são duas a duas concorrentes e não passam pelo mesmo ponto, prove que elas são coplanares.

5. Construa quatro pontos não coplanares.

6. Dada uma reta r, mostre que existem infinitos planos contendo r.

7. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

   a) Por três pontos distintos passa um único plano;

   b) Se três retas passam pelo mesmo ponto, então essas retas são coplanares;

   c) Por dois pontos distintos passam infinitos planos;

   d) Quatro pontos não coplanares determinam quatro planos.

8. Prove que existe um único plano contendo duas retas paralelas.

9. Construa três retas, duas a duas reversas.

10. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

    a) três retas, duas a duas paralelas, determinam três planos;

    b) se uma reta corta uma de duas retas paralelas, então corta também a outra;

    c) se r e s são reversas com t, então r e s são reversas entre si;

    d) se uma reta é reversa com uma de duas retas paralelas, então é reversa também com a outra.

11. Sejam r e s retas reversas e P um ponto que não pertence a r nem a s. Prove que existe no máximo uma reta que passa por P e corta r e s. Pode-se garantir que sempre existe uma? Justifique.

12. Considere duas retas reversas r e s e pontos $A \in r$ e $B \in s$. Seja α o plano que contém r e B, e seja β o plano que contém s e A. Determine $\alpha \cap \beta$.

13. Dada uma reta r, mostre como obter um plano α paralelo a r.

14. Sejam r e s retas reversas. Prove que existe um único plano contendo r e paralelo a s.

15. A **Figura 18.13** mostra um quadrilátero $ABCD$ em que os vértices A , B, C e D são não coplanares. Chamamos um tal quadrilátero de reverso. Prove que o quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados de $ABCD$ é um paralelogramo.

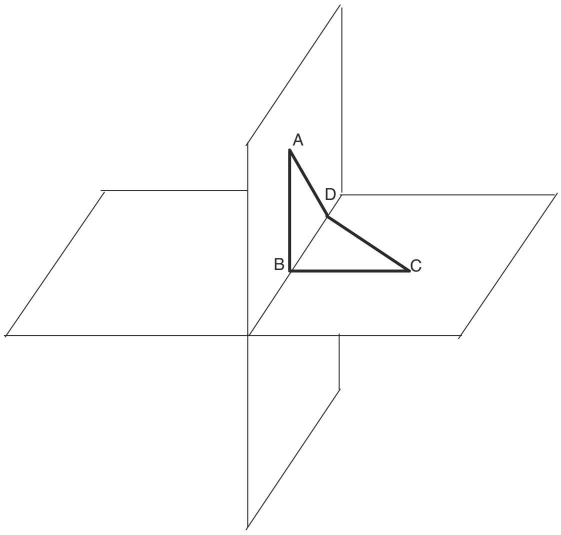

Figura 18.13: Exercício 15 .

16. Sejam r e s retas reversas e P um ponto que não pertence a r nem a s. Prove que existe no máximo um plano contendo P e paralelo às retas r e s. Pode-se garantir que sempre existe um? Justifique.

17. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

    a) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano;

    b) Se uma reta corta um plano, corta qualquer reta do plano;

    c) Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si;

    d) Por um ponto fora de um plano passa uma única reta paralela ao plano;

    e) Por um ponto fora de uma reta passam infinitos planos paralelos à reta;

    f) Dados um ponto P e retas reversas r e s, sempre existe uma reta que passa por P e corta r e s.

18. O objetivo deste exercício é provar a proposição 6: "Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta de interseção entre α e β ". Isso será feito da seguinte forma: faremos uma série de afirmações, e caberá a você justificá-las. Seja $s = \alpha \cap \beta$ e tome um ponto $A \in s$. Seja γ o plano contendo r e o ponto A.

    - A interseção entre γ e α é uma reta, que chamaremos t_1;
    - A interseção entre γ e β é uma reta, que chamaremos t_2;
    - Temos $r//t_1$ e $r//t_2$;
    - $t_1 = t_2 = \alpha \cap \beta$;
    - $r//(\alpha \cap \beta)$.

19. Suponha que uma reta r esteja contida em um plano α. Se uma reta s corta α em um ponto $P \notin r$, prove que não existe um plano que contém r e s.