Aula 29

1. Volume: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

   Área total: $a^2\sqrt{3}$

2. $\dfrac{2-\sqrt[3]{7}}{2}$

3. Volume: $90\sqrt{3}$ cm^2

   Área lateral: $54\sqrt{15}$ cm^2

4. (Desafio!)

   $a_l = \sqrt{10018 - 3998\sqrt{5}}$

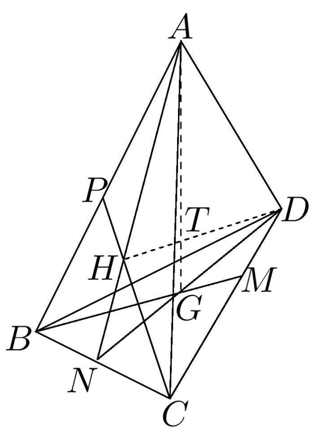
5. $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{5(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$

6. Volume: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

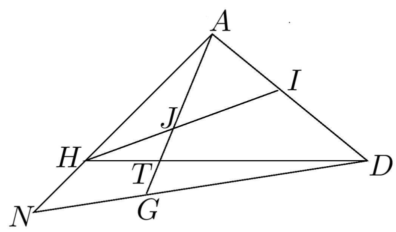
   Área total: $2a^2\sqrt{3}$

7. $\dfrac{V}{12}$

8.



Seja $ABCD$ uma pirâmide qualquer e sejam M, o ponto médio de CD; N, o ponto médio de BC e P, o ponto médio de AB. Temos que $G = DN \cap BM$ é o baricentro de DBC e que $H = CP \cap AN$ é o baricentro de ABC. Mostraremos que AG e DH se intersectam em um ponto que divide tanto AG quanto DH na razão $\dfrac{1}{3}$. Para isso, seja α o plano que contém A, N e D. Temos que $AG \subset \alpha$ e $DH \subset \alpha$. Logo, AG e DH se intersectam em um ponto, que chamaremos T. Trace $HI \parallel ND$ e seja $J = HI \cap AG$. Temos $HJT \sim DGT$.



Logo,

$$\frac{m(HJ)}{m(GD)} = \frac{m(JT)}{m(GT)} \qquad (*)$$

Como $AHJ \sim ANG$ e $\dfrac{m(AH)}{m(AN)} = \dfrac{2}{3}$, tem-se

$$\begin{aligned} m(HJ) &= \frac{2}{3}\, m(NG) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\, m(ND)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\, m(ND)\right) = \frac{1}{3}\, m(GD) \qquad (**) \end{aligned}$$

Substituindo em $(*)$, temos

$$\frac{m(JT)}{m(GT)} = \frac{m(HJ)}{m(GD)} = \frac{1}{3} \qquad (***)$$

Usando novamente a semelhança $AHJ \sim ANG$, tem-se

$$\frac{m(AJ)}{m(AG)} = \frac{m(AH)}{m(AN)} = \frac{2}{3},$$

donde $m(AJ) = \dfrac{2}{3}\, m(AG)$. Segue que

$$m(JG) = \frac{1}{3}\, m(AG).$$

Usando $(***)$, obtém-se

$$\begin{aligned} m(AG) &= 3m(JG) = 3(m(JT) + m(TG)) \\ &= 3\left(\frac{m(GT)}{3} + m(GT)\right) \\ &= 4\, m(GT)\,, \end{aligned}$$

de onde se conclui que $m(GT) = \dfrac{1}{4}\, m(AG)$. Portanto, $m(AT) = \dfrac{3}{4}\, m(AG)$ e

$$\boxed{\frac{m(GT)}{m(AT)} = \frac{1}{3}}$$

Usando (∗∗) e a semelhança $HJT \sim DGT$, conclui-se que $\dfrac{m(HT)}{m(TD)} = \dfrac{1}{3}$. Logo, AG e DH encontram-se em um ponto T que divide tanto AG quanto DH na razão $\dfrac{1}{3}$. Considerando, agora, AG e BU, onde U é o baricentro de ACD, e raciocinando como acima, prova-se que AG e BU cortam-se em um ponto que divide tanto AG quanto BU na razão $\dfrac{1}{3}$. Esse ponto é o próprio ponto T, pois T divide AG na razão $\dfrac{1}{3}$.

Analogamente, prova-se que CV, onde V é o baricentro de ABD, passa por T e que T divide CV na razão $\dfrac{1}{3}$.

9. $V = \dfrac{A_B h}{3} \qquad V_1 = \dfrac{A_{B_1} h_1}{3}$

$$V_1 = \frac{1}{2}V; \quad \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{A_{B_1}h_1}{3}}{\frac{A_B h}{3}} = \frac{A_{B_1}h_1}{A_B h}$$

Mas $\left(\dfrac{A_{B_1}}{A_B}\right) = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2$. Logo, $\dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2 \dfrac{h_1}{h} = \dfrac{{h_1}^3}{h^3} = \dfrac{1}{2}$.

$${h_1}^3 = \frac{h^3}{2}, \quad \boxed{h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}}$$

10. $\dfrac{a^3}{3}$

11. Considere o tetraedro $ABCD$ e seja P um ponto em seu interior. Seja a a medida de sua aresta.

Podemos construir os seguintes tetraedros: $PABC$, $PABD$, $PACD$, $PBCD$, que não são regulares.

Temos que:

$$V_{ABCD} = V_{PABC} + V_{PABD} + V_{PACD} + V_{PBCD}$$

$$V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ (questão 1)}$$

$V_{PABC} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot d_1}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot d_1$; onde d_1 é a distância de P ao plano determinado pelos pontos A, B e C.

$V_{PABD} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot d_2}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} d_2$; onde d_2 é a distância de P ao plano determinado pelos pontos A, B e D.

$V_{PACD} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot d_3}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} d_3$, onde d_3 é a distância de P ao plano determinado pelos pontos A, C e D.

$V_{PBCD} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot d_4}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}\,d_3$, onde d_4 é a distância de P ao plano determinado pelos pontos B, C e D.

Logo,

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,d_1 + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,d_2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,d_3 + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,d_4 \\ &\quad \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,(d_1+d_2+d_3+d_4) \end{aligned}$$

$a\sqrt{2} = \sqrt{3}(d_1+d_2+d_3+d_4)$

$d_1+d_2+d_3+d_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ = constante, ou seja, a soma é constante.

12. $\dfrac{3R}{4\pi h}$

13. $3\pi\sqrt{91}$ cm^3

14. 9 m

15. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

16. 9 m

17. $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3

18. $V_C = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{240}{17}\right)^2\left(\dfrac{450}{17}\right)$

19. $\dfrac{\pi r^2}{4}(4-\operatorname{sen}^2\theta)$

20. $R_1 = R_2 = \dfrac{R}{2}$

21. (e)

22. (a)

23. (d)

24. (a)

25. (d)

26. $R = r\sqrt[3]{35}$