Aula 28 – Volume de prismas e cilindros

Objetivos

- Apresentar o Princípio de Cavalieri.
- Determinar o volume de um paralelepípedo usando o Princípio de Cavalieri.
- Calcular o volume de um prisma.
- Calcular o volume de um cilindro.

Introdução

A determinação do volume de um paralelepípedo qualquer mostra que a tarefa de determinar o volume dos sólidos, mesmo dos mais simples, não é uma tarefa fácil. Essa tarefa pode ser grandemente facilitada se utilizarmos o *Princípio de Cavalieri.*

Princípio de Cavalieri
Considere dois sólidos S_1 e S_2 e um plano α. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as seções planas $\beta \cap S_1$ e $\beta \cap S_2$ têm a mesma área. Então $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ (figura 182).

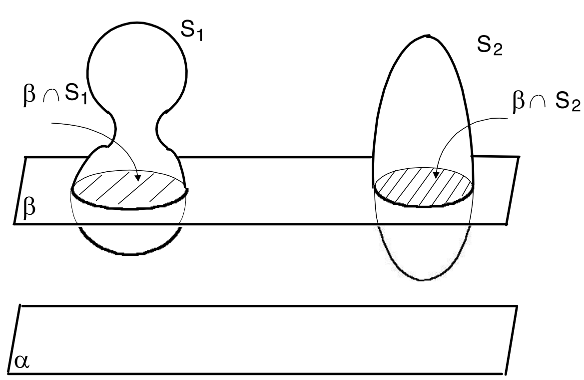

Fig. 182: Princípio de Cavalieri.

Cavalieri.
1598 -1647.

Bonaventura Francesco Cavalieri se agregou à ordem dos Jesuítas em Milão em 1615, enquanto ainda era um garoto. Seu interesse em Matemática foi estimulado pelos trabalhos de Euclides e depois por Galileu. A teoria de indivisíveis apresentada por ele, em 1635, permitiu encontrar facilmente e rapidamente áreas e volumes de várias figuras geométricas.
Cavalieri também escreveu sobre seções cônicas, trigonometria, ótica, astronomia e astrologia.
Consulte:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cavalieri.html`

Cálculo do volume do paralelepípedo usando o princípio de Cavalieri

Vejamos, agora, como se torna simples a prova para a fórmula do volume de um paralelepípedo qualquer, quando se utiliza o princípio de Cavelieri. Seja $S_1 = ABCDEFGH$ um paralelepípedo qualquer e sejam α e β os planos das faces $ABCD$ e $EFGH$ (veja a figura 183).

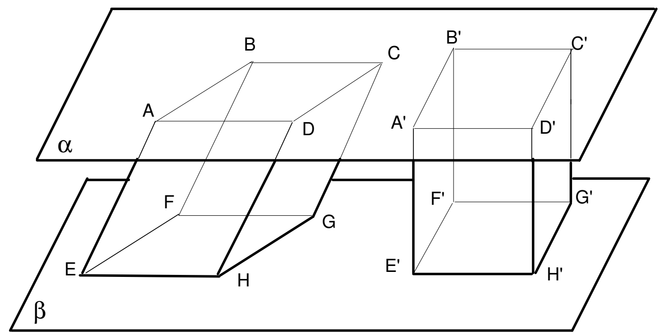

Fig. 183: Cálculo do volume de um paralelepípedo.

No plano α, tome um retângulo $A'B'C'D'$ que tem a mesma área que $ABCD$ e, pelos pontos A', B', C' e D' trace perpendiculares a α. Essas retas cortam o plano β em pontos E', F', G' e H' (veja a figura 183). O paralelepípedo $S_2 = A'B'C'D'E'F'G'H'$ obtido é retangular. Seja γ um plano qualquer paralelo ao plano β e que corta S_1 e S_2. Sabemos que $\gamma \cap S_1$ é congruente a $EFGH$ e $\gamma \cap S_2$ é congruente a $E'F'G'H'$ (veja a figura 184).

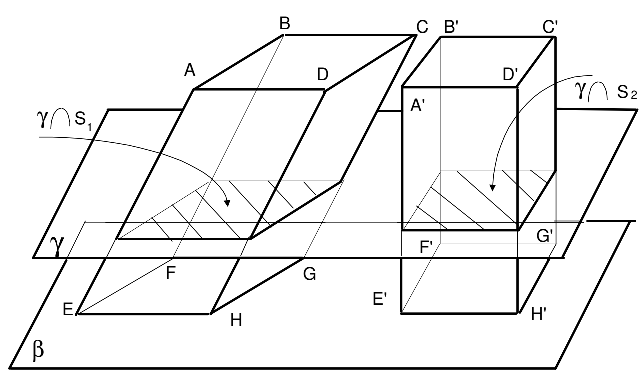

Fig. 184: $\gamma \cap S_1$ e $\gamma \cap S_2$ têm a mesma área.

Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S_1) = \text{Área}(EFGH) = \text{Área}(E'F'G'H') = \text{Área}(\gamma \cap S_2)$$

para todo plano γ paralelo a β.

Pelo Princípio de Cavalieri tem-se

$$Vol(S_1) = Vol(S_2)$$

Como já sabemos que o volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura, temos

$$Vol(S_1) = Vol(S_2) = \text{Área}(E'F'G'H')m(A'E') = \text{Área}(EFGH).altura(S_1)$$

O Princípio de Cavalieri é, na verdade, um teorema; isto é, ele pode ser provado. Sua prova, porém, envolve conceitos avançados da Matemática, que ainda não temos condições de abordar. Embora possamos obter o volume dos principais sólidos (cilindros, prismas, cones, pirâmides, esferas etc.) sem utilizar o princípio de Cavalieri, a utilização desse princípio simplifica bastante a determinação de alguns desses volumes. Em vista disso, neste curso esse princípio será aceito como verdadeiro, sem prova.

Cálculo do volume do prisma

Um procedimento análogo ao utilizado na determinação do volume de um paralelepípedo, pode ser utilizado na determinação do volume de um prisma qualquer. Seja S um prisma cuja base é um polígono P qualquer. No plano da base, considere um retângulo $ABCD$ de área igual à area de P. Sobre esse retângulo construa um paralelepípedo retangular S' de altura igual à altura de S. Seja γ um plano paralelo à base de S e que é secante a S (veja na figura 185 um caso particular onde a base de S é um hexágono).

Sabemos que $\gamma \cap S$ é congruente a P e que $\gamma \cap S'$ é congruente a $ABCD$. Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S) = \text{Área}(P) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(\gamma \cap S')$$

para todo plano γ paralelo à base de S.

Pelo Princípio de Cavalieri, tem-se

$$Vol(S) = Vol(S') = \text{Área}(ABCD).m(AE).$$

Provamos então que

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

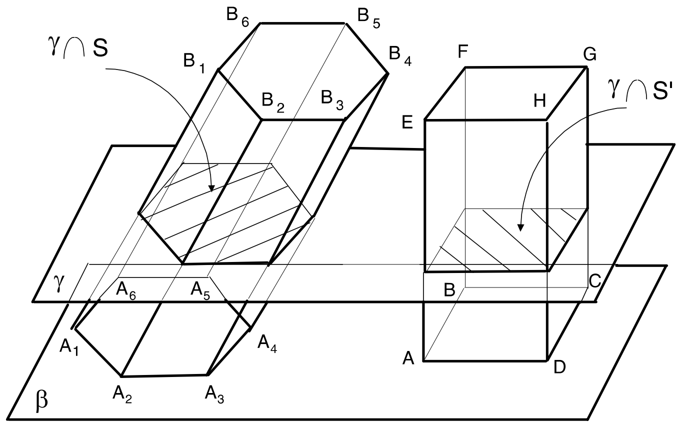

Fig. 185: Cálculo do volume do prisma.

Cálculo do volume do cilindro

Para determinar o volume de um cilindro, procedemos de maneira análoga à do cálculo do volume de um prisma. Dado um cilindro C (reto ou oblíquo) de altura h e cuja base é um círculo Γ contido em um plano α, considere um paralelepípedo retangular R de altura h e cuja base é um retângulo contido em α e de mesma área que Γ (veja figura 186).

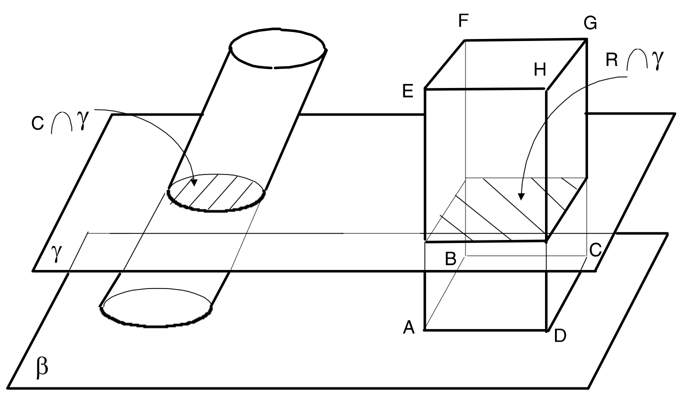

Fig. 186: Cálculo do volume do cilindro.

Para todo plano γ, paralelo a α e secante a C, tem-se

$$\text{Área}(C \cap \gamma) = \text{Área}(\Gamma) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(R \cap \gamma).$$

Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que

$$Vol(C) = Vol(R) = \text{Área(ABCD)}.m(AE) = \text{Área}(\Gamma).\text{altura}(C).$$

Provamos então que

O volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela altura.

Resumo

Nessa aula você aprendeu...

- O Princípio de Cavalieri.
- A calcular o volume de um prisma.
- A calcular o volume de um cilindro.

Exercícios

1. Calcule o volume de um prisma reto de $3\,m$ de altura, cuja base é um hexágono regular, sabendo que se a altura fosse de $5\,m$ o volume aumentaria em $6\,m^3$.

2. Um prisma reto tem $12\,cm$ de altura e sua base é um triângulo cujos lados medem $2\,cm$, $4\,cm$ e $(20 + 8\sqrt{3})\,cm$. Determine o volume do prisma.

3. Calcule o volume de um prisma reto de altura a e cuja base é um pentágono (dodecágono) regular de lado a.

4. Em um prisma oblíquo, a aresta lateral mede $6\,cm$ e sua seção reta (perpendicular às arestas laterais) é um hexágono regular de $6\sqrt{3}\,cm^2$. Determine a área lateral e o volume desse prisma.

5. Um cilindro, de raio da base igual a $4\,cm$ e geratriz medindo $6\,cm$, tem seu eixo formando um ângulo de 45^o com o plano da base. Determine o volume desse cilindro.

6. Deseja-se construir um reservatório na forma de um cilindro equilátero e que tenha volume igual a um reservatório na forma de um paralelepípedo retangular de dimensões $2\,m \times 2\,m \times 1,5\,m$. Qual o raio do cilindro?

7. Quantos litros de água deve conter aproximadamente um reservatório cilíndrico de $3\,m$ de raio e $8\,m$ de altura?

Lembre-se que...
$1\ell = 1\,dm^3$

8. Em um reservatório cilíndrico de raio igual a $50\,cm$, colocou-se uma pedra, o que elevou em $35\,cm$ o nível da água. Determine o volume da pedra.

9. Com uma folha de zinco de $5\,m$ de comprimento e $4\,m$ de largura, podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Em qual dos casos o volume será maior?

10. Um cilindro reto de raio r e altura h é cortado por um plano paralelo ao seu eixo. Se a distância entre o eixo e o plano é $\frac{r}{2}$, determine os volumes dos sólidos obtidos.

11. Um sólido S está localizado entre dois planos horizontais α e β, cuja distância é de $1\,m$. Cortando o sólido por qualquer plano horizontal compreendido entre α e β, obtém-se como seção um disco de raio igual a $1\,m$.

    a) Pode-se garantir que o sólido S é um cilindro? Justifique.

    b) Calcule o volume de S.

12. (PUC-SP, 1985) Se a área da base de um prisma diminui 10% e a altura aumenta 20%, o seu volume:

    (a) aumenta 8%.

    (b) aumenta 15%.

    (c) aumenta 108%.

    (d) diminui 8%.

    (e) não se altera.

13. (VUNESP-1988) Considere um galpão como o da figura 187

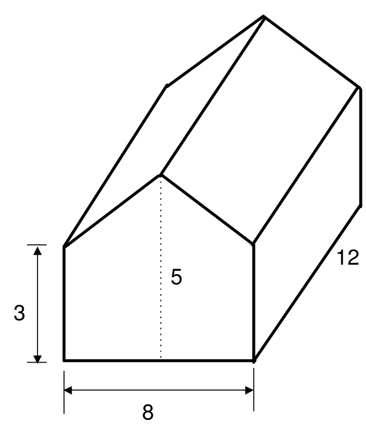

Fig. 187: Exercício 13.

O volume de ar contido no galpão é igual a:

(a) 288   (b) 384   (c) 480   (d) 360   (e) 768

14. (CRESCEM, 1977) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo diâmetro da base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:

    (a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24 (e) 36

15. (CESGRANRIO, 1983) Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio d'água, tem $10\,dm$ de altura e $5\,dm$ de raio da base. Inclinando-se o tonel de 45^o, o volume de água derramada é, aproximadamente:

    (a) $145\,dm^3$ (b) $155\,dm^3$ (c) $263\,dm^3$
    (d) $353\,dm^3$ (e) $392\,dm^3$

16. (U.F.GO, 1984) Um pedaço de cano, de $30\,cm$ de comprimento e $10\,cm$ de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e possui a parte inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água:

    a) irá ultrapassar o meio do cano

    b) transbordará

    c) não chegará ao meio do cano

    d) encherá o cano até a borda

    e) atingirá exatamente o meio do cano