Geometria Espacial - EP Aula 26 - Poliedros

Questão 1. Nesta atividade eletrônica você vai refletir sobre a definição de poliedro apresentada no módulo.

`https://www.geogebra.org/m/cvekcytw`

Questão 2. Descreva e desenhe todos os poliedros convexos que possuem 10 arestas. Justifique a sua solução detalhadamente (**dica:** mostre primeiro que todo poliedro de 10 arestas, possui 6 faces).

Questão 3. Um poliedro convexo P possui A arestas, V vértices e F faces. Constroem-se pirâmides com vértices exteriores a P com bases em cada uma das faces. Fica formado então um poliedro P' que só possui faces triangulares. Determine os números de arestas, faces e vértices de P'.

Questão 4. Um cubo de aresta a é seccionado por planos que cortam cada um, todas as arestas concorrentes num vértice em pontos que distam x ($x < a/2$) deste vértice. Retirando-se as pirâmides formadas, obtém-se um poliedro P. Descreva esse poliedro e calcule seu número de diagonais.

Questão 5. Segundo um dicionário "definição" significa "operação linguística que busca a determinação clara e precisa de um conceito ou um objeto.".

a) Defina polígono regular (não é necessário definir polígono).
b) Defina poliedro regular (não é necessário definir poliedro).
c) Explique o conceito de poliedro regular e dê exemplos de poliedros regulares.

Questão 6. Explique brevemente a relação de Euler para poliedros. Em sua explicação, lembre-se de definir, diga sob que condições a relação é verdadeira, se a relação pode valer sem estas condições e apresente exemplos.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO

Questão 7. A seguir são enunciadas definições de poliedro e solitada a construção de exemplos. Seus exemplos devem conter figuras e, preferencialmente, conter também links para constuções no Geogebra. Capriche!

Definição 1 (Poliedro tipo A (Geometria Básica, módulo 2 - E. L. C. Ferreira e outros - Cederj))**.** *Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados faces tais que:*

- *cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;*
- *a interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.*

Definição 2 (Poliedro tipo B (A Matemática do Ensino Médio, vol. 2 - E. L. Lima - IMPA))**.** *Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

(i) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

(ii) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

(iii) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Definição 3 (Poliedro tipo C (Basic Topology - M. A. Armstrong - Springer))**.** *Um poliedro é uma coleção finita de polígonos planos que se encaixam bem, no seguinte sentido. Se dois polígonos se encontram, eles têm exatamente um lado em comum (incluindo os vértices deste lado) ou um vértice em comum. Cada lado de um polígono é lado de exatamente um outro polígono. Além disso, exige-se que, se considerarmos os polígonos que contêm um vértice em particular, então podemos nomeá-los Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_k de tal forma que Q_i tem um lado em comum com Q_{i+1} para $1 \leq i < k$, e Q_k tem um lado em comum com Q_1. Em outras palavras, os polígonos se encaixam para formar uma superfície ao redor de um vértice. O número k pode variar de um vértice para outro.*

a) Existe poliedro que seja dos três tipos A, B e C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
b) Existe poliedro do tipo A, mas que não é do tipo B? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
c) Existe poliedro do tipo A, mas que não é do tipo C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
d) Existe poliedro do tipo B, mas que não é do tipo C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
e) Existe poliedro do tipo C, mas que não é do tipo B? Em caso afirmativo apresente um exemplo.

Questão 8. Nesta questão apresentamos uma construção feita no livro Basic Topology (M. A. Armstrong, Springer) com o objetivo de provar uma versão mais geral do Teorema de Euler.

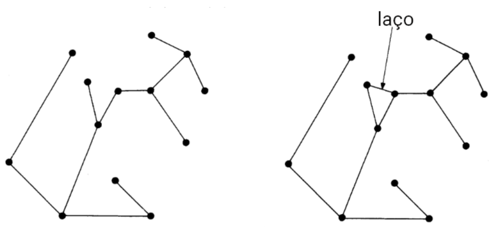
Teorema de Euler. Seja P um poliedro com V vértices, A arestas e F faces tal que:

(a) Quaisquer dois vértices podem ser conectados por uma sequência de arestas.
(b) Qualquer curva fechada (laço) sobre P separa o poliedro P em duas partes disjuntas.

Então $V - A + F = 2$.

Demonstração:

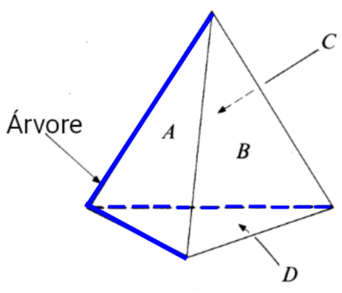
Um conjunto conexo de vértices e arestas de P será chamado de *grafo*: conexo significa simplesmente que quaisquer dois vértices podem ser ligados por uma cadeia de arestas no grafo. Mais geralmente podemos usar a palavra grafo para qualquer conjunto finito de segmentos de reta no espaço tridimensional que se encaixam bem como na figura a seguir (se dois segmentos se intersectam, isso ocorre em um de seus vértices).



Grafos. Na esquerda uma árvore, na direita um grafo com laço.

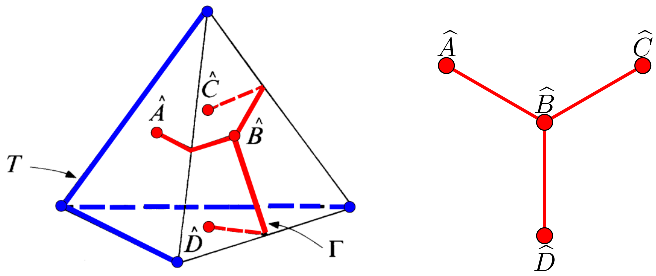
Um grafo que não contém *laços* é chamado de *árvore*. Repare que para qualquer árvore, o número de vértices menos o número de arestas é igual a 1. Se a árvore é denotada por T, então podemos escrever $v(T) - a(T) = 1$.

O conjunto de todos os vértices e arestas do poliedro P é um grafo. Não é difícil de mostrar que todo grafo possui um subgrafo que é uma árvore e contém todos os vértices do grafo original. Então escolha uma árvore T que consista de algumas arestas e de *todos* os vértices de P (veja o exemplo do tetraedro na figura a seguir).



Árvore T no tetraedro.

Agora considere uma espécie de "dual" de T. Este dual é um grafo Γ definido da seguinte maneira. Para cada face A de P criamos um vértice $\widehat{A}$ de Γ. Dois vértices $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ de Γ serão unidos por uma aresta de Γ se, e somente se, as faces correspondentes A e B são adjacentes e a aresta comum dessas duas faces não é uma aresta de T. É possível representar Γ em P sem que ele intersecte T (o vértice $\widehat{A}$ corresponde a um ponto interior da face A, veja a figura a seguir).



Árvores T e Γ no tetraedro à esquerda. Árvore Γ, à direita.

Não é difícil de acreditar que o dual Γ é conexo e, portanto, é um grafo. Intuitivamente, se dois vértices de Γ não podem ser unidos por uma sequência de arestas de Γ, então eles estariam separados um do outro por um laço de T. Como T não contém laços, deduzimos que Γ precisa ser conexo.

Observe que Γ é uma árvore. Se Γ tivesse um laço, ele separaria o poliedro P em duas partes, pela hipótese (b). E cada uma dessas duas partes precisa conter ao menos um vértice de T. Qualquer tentativa de conectar dois vértices de P que estejam cada um em uma dessas partes, precisa intersectar o laço de Γ que separa as duas partes. Isso contradiz o fato de T ser conexo. Portanto, Γ é uma árvore.

<<*Argumentos*>>

Portanto, se V, A e F são, respectivamente, os números de vértices, arestas e faces de P, então $V - A + F = 2$. O que conclui a demonstração.

a) Construa um cubo no Geogebra e destaque nele árvores T e Γ como as apresentadas acima para o tetraedro. Inclua na sua resposta o link para sua construção e imagens da construção feita.

b) Mostre que para qualquer árvore T vale $v(T) - a(T) = 1$.

c) Complete a demonstração do Teorema de Euler usando os grafos T e Γ.