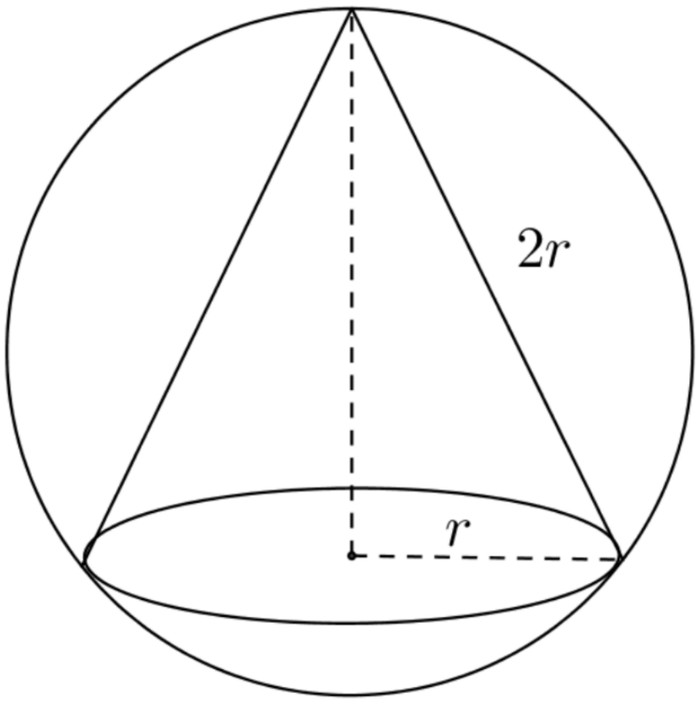
Geometria Espacial - EP - Gabarito

Aula 25: Esferas

Exercícios de contas

Exercício 1. Considere a figura a seguir onde estão representados um cone reto cujo raio da base é r e cuja geratriz mede $2r$. Este cone está inscrito em uma esfera de raio R. Determine o valor do raio R da esfera em função do raio r da base do cone.

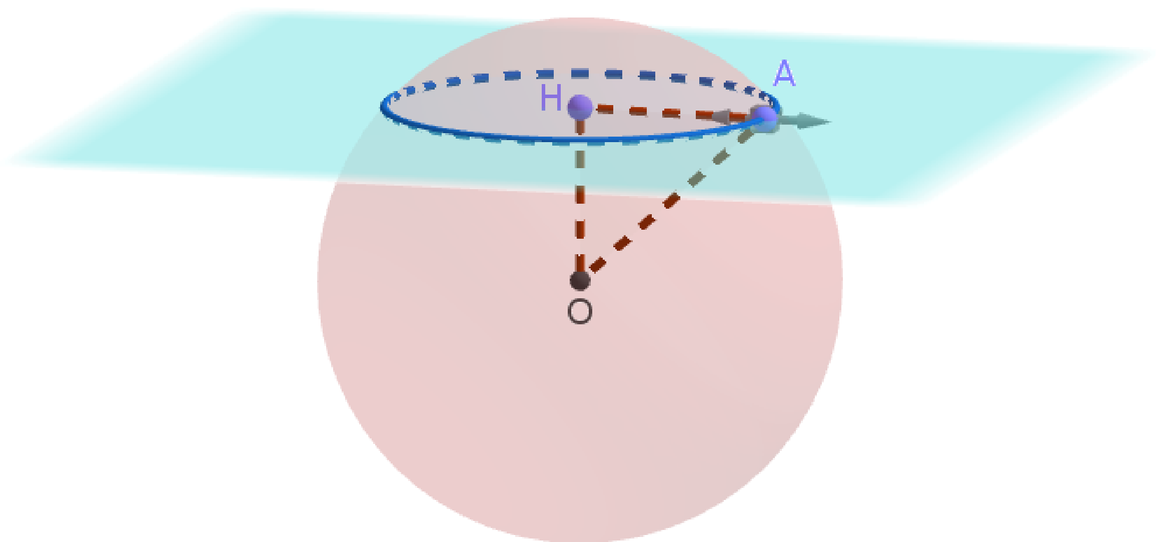


Solução: Para calcular o valor de R em função do raio r da base do cone, considere um triângulo retângulo formado por uma geratriz, por um raio da base e pela altura H do cone. Do Teorema de Pitágoras obtemos que $(2r)^2 = r^2 + H^2$, de onde decorre que $H = r\sqrt{3}$. Agora de posse da medida da altura do cone, consideramos um novo triângulo retângulo cujos vértices são o centro da esfera, o centro da base do cone e um ponto da circunferência da base.

Observe que este triângulo retângulo possui hipotenusa R e catetos r e $H - R$. Usando o Teorema de Pitágoras neste novo triângulo obtemos $R^2 = r^2 + (r\sqrt{3} - R)^2$, o que relaciona os valores de r e R, justamente o que buscávamos. Manipulando a igualdade, obtemos $R^2 = r^2 + (3r^2 - 2\sqrt{3}rR + R^2)$, de onde segue que $R = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Exercício 2. A área da interseção de um plano com uma bola de raio 18 cm é 256 cm^2. Determine a distância do plano ao centro da bola.

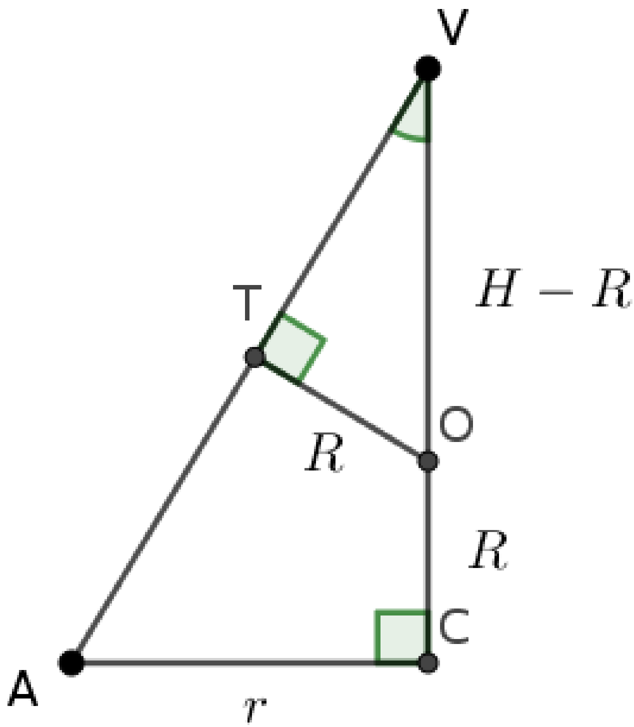
Solução: A distância do plano ao centro da esfera é o comprimento do segmento perpendicular ao plano OH como na figura.



Para calcular esta distância precisamos conhecer o raio da circunferência formada na seção e usar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OHA. O raio da circunferência pode ser obtida por meio da área $256 = \pi r^2$, portanto, $r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$. Passando ao Teorema de Pitágoras temos $18^2 = r^2 + d^2 = \left(\frac{256}{\pi}\right) + d^2$. Efetuando as contas obtemos $d = \sqrt{\frac{324\pi - 256}{\pi}}$

Exercício 3. Encontre o raio da maior esfera que cabe em um cone reto de altura H e raio de base r.

Solução: Esta é a esfera inscrita no cone reto. Então apenas precisamos calcular o raio desta esfera. Seja T um ponto de tangência da esfera com o cone, V o vértice do cone, C o centro da circunferência da base, O o centro da esfera em questão e A o ponto da circunferência da base que está na mesma geratriz que o ponto T.



Como os triângulos VTO e VCA têm dois ângulos em comum, eles são semelhantes. De onde decorre que

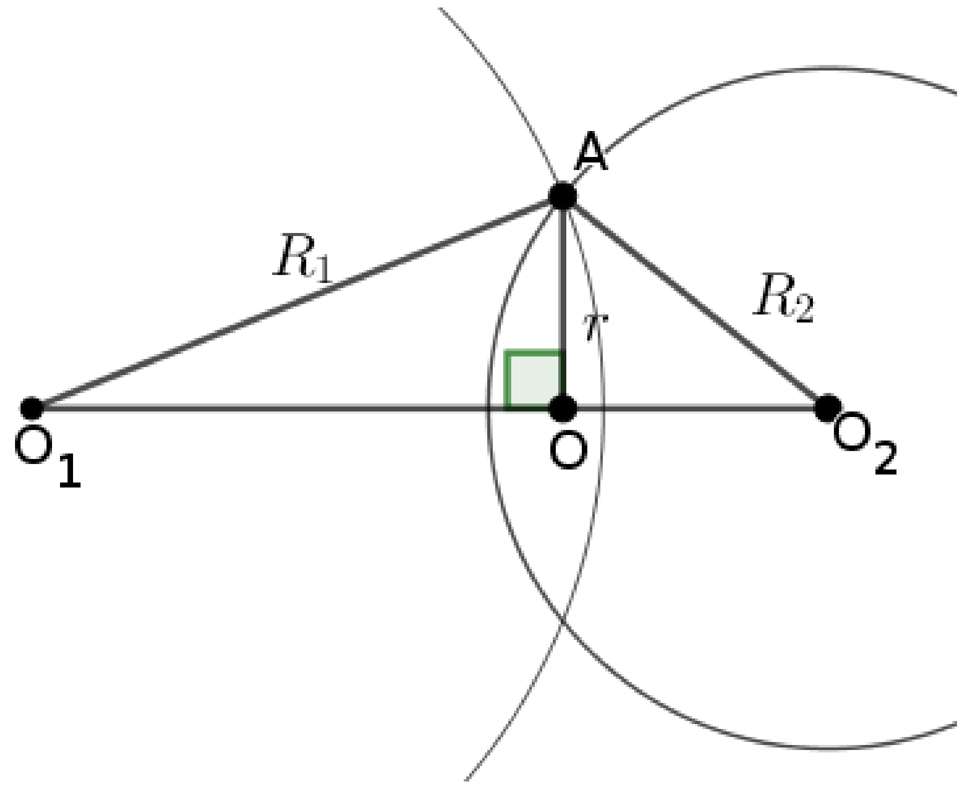
$$\frac{H-R}{R} = \frac{\sqrt{H^2-r^2}}{r}.$$

De onde decorre que $R + \frac{R\sqrt{H^2+r^2}}{r} = H$, logo

$$R = \frac{rH}{r+\sqrt{H^2+r^2}}.$$

Exercício 4. Considere duas esferas S_1 e S_2 centradas em O_1 e O_2 com raios $R_1 = 2\sqrt{29}$ e $R_2 = \sqrt{41}$, respectivamente. Assuma que a interseção entre estas esferas é um círculo centrado em O com raio $r = 4$. Qual é a distância entre os centros das esferas O_1 e O_2?

Solução: Vimos na aula que O pertence ao segmento O_1O_2. Seja A um ponto da circunferência de interseção das duas esferas. Os triângulos O_1OA e O_2OA são retângulos.



Usando o Teorema de Pitágoras, em cada um deles obtemos $R_1^2 = r^2 + O_1O^2$, de onde se obtém $O_1O = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 4^2} = 10$ e $R_2^2 = r^2 + O_2O^2$, de onde se obtém $O_2O = \sqrt{\sqrt{41}^2 - 4^2} =$

5. Conclusão, a distância entre os centros das esferas é $O_1O_2 = O_1O + O_2O = 15$.

Exercícios de argumentação e prova

Exercício 5. Prove que a interseção da esfera de centro O e raio 3 metros com um plano que está a uma distância 1 metro de O é uma circunferência. **Dica:** (a) Faça uma figura. (b) Que condição um ponto precisa cumprir para estar em uma circunferência? (c) Para que pontos você precisa verificar a condição do item anterior. (d) Repare que você precisa mostrar que dois conjuntos são iguais.

Solução: Está feito na aula no módulo.

Exercício 6. Considere duas esferas S_1 e S_2 centradas em O_1 e O_2 com raios $R_1 = 3$ e $R_2 = 4$, respectivamente, e suponha que o comprimento do segmento $O_1O_2 = 5$. Explique por que (isto é, prove que) a interseção de S_1 e S_2 é uma circunferência. **Dica:** Veja o vídeo na sala da disciplina.

Solução: Está feito na aula no módulo e no vídeo.