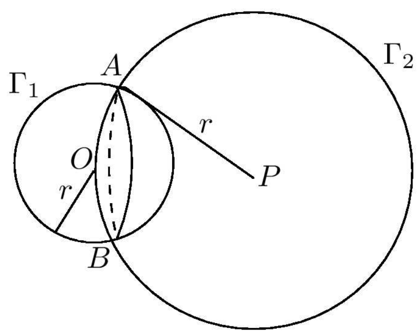
Aula 25

1. 13 cm
2. $\sqrt{{R_1}^2 - r^2} \pm \sqrt{{R_2}^2 - r^2}$
3. $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$
4. 400π cm^2
5.



Seja Γ_1 esfera de raio r e centro O. P está fora de Γ_1. $d(P, O) = 2r$. Todos os pontos que distam $2r$ de P definem a esfera Γ_2 (Γ_2 esfera de centro em P e raio $2r$). Então temos que o ponto $O \in \Gamma_2$. Daí a esfera Γ_2 corta a esfera Γ_1.

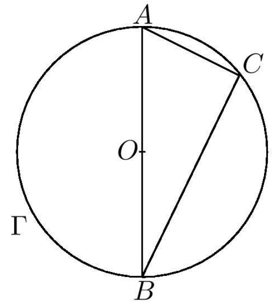
Como sabemos que a interseção de duas esferas é um círculo ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = C$), temos que este círculo é a união dos pontos de Γ_1 que distam $2r$ de P.

6. Γ esfera de raio $\overline{OA}$ e centro em O, α plano tangente a Γ em A. Então, $\Gamma \cap \alpha = A$.

7. $2(4 + \sqrt{7})$

8. $\dfrac{10}{3} \simeq 3,4$ cm

9. Sejam O o ponto médio de AB e S a esfera de centro O e raio OA. Seja S' o conjunto dos pés das perpendiculares traçadas de A aos planos que passam por B. Provaremos que $S = S'$. Seja $C \neq A$, B um ponto de S (se $C = A$ ou $C = B$, C pertence a S e a S'). Se α é o plano que passa por A, B e C, tem-se que ABC é um triângulo inscrito no círculo $\Gamma = \alpha \cap S$ de forma que $A\widehat{C}B$ subtende um semicírculo. Segue que $A\widehat{C}B$ é reto. Conseqüentemente, o plano que passa por C e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ contém B e, portanto, $C \in S'$.



Reciprocamente, seja $C \neq A, B$ um ponto de S' e seja β o plano que passa por B tal que C é o pé da perpendicular traçada de A a β. Como $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a β, tem-se que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (pois $\overleftrightarrow{BC}$ está contida em β), ou seja, que ABC é retângulo de hipotenusa AB. Como a mediana relativa à hipotenusa tem metade de seu comprimento (veja o exercício 7 da aula 6), conclui-se que $m(OC) = m(AB)/2$, ou seja, que $OC \equiv OA$. Portanto, $C \in S$.

10. (c)

11. Esferas tangentes exteriormente.

Sejam r_1 o raio de S_1 e r_2 o raio de S_2.

Como $T \in S_1 \cap S_2$, tem-se $m(O_1T) = r_1$ e $m(O_2T) = r_2$. Pela desigualdade triangular, tem-se $m(O_1O_2) \leq m(O_1T) + m(TO_2) = r_1 + r_2$.

Por outro lado, como S_1 e S_2 têm apenas um ponto em comum, não podemos tem $m(O_1O_2) < r_1 + r_2$. Segue então que $m(O_1O_2) = r_1 + r_2 = m(O_1T) + m(TO_2)$. Logo, O_1, O_2 e T são colineares e, além disso, T é um ponto do segmento O_1O_2.

12. Suponha que $A \in \alpha$. Nesse caso, $\overleftrightarrow{AQ} \subset \alpha$. Como $r \perp \alpha$, segue que $r \perp \overleftrightarrow{AQ}$. Logo, $P\widehat{Q}A$ é reto.

Reciprocamente, suponha que $P\widehat{Q}A$ seja reto, e seja β o plano que contém r e A.

Se $s = \alpha \cap \beta$, tem-se que $Q \in s$. Além disso, como $r \perp \alpha$ e $s \subset \alpha$, tem-se $r \perp s$. Assim, as retas s e $\overleftrightarrow{AQ}$ ambas passam por Q, estão contidas em β e são perpendiculares a r. Conclui-se que $s = \overleftrightarrow{AQ}$. Portanto, $A \in \alpha$.

13. (e)