Aula 24 – O cilindro e o cone

Objetivos

- Identificar e classificar cilindros e cones.

Cilindro

Sejam α e α' dois planos paralelos e Γ um círculo contido em α. Seja r uma reta que corta α e α'. Por cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace a reta paralela a r e seja X' o ponto em que essa reta intersecta α'. A união de todos os segmentos XX' é chamada de *cilindro circular* (veja a figura 146).

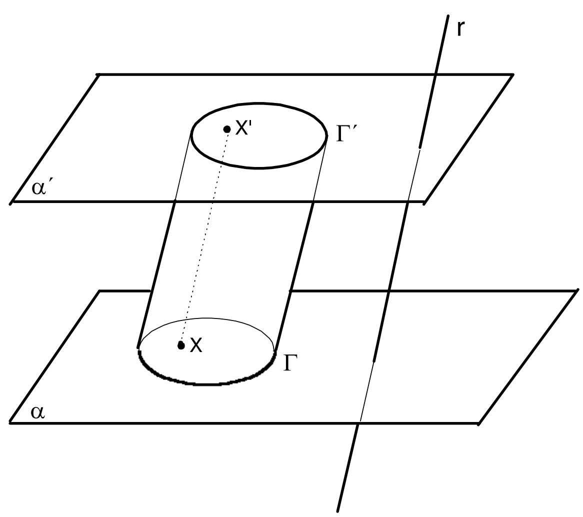

Fig. 146: Cilindro circular.

A interseção do cilindro com o plano α' é um círculo Γ' de mesmo raio que Γ (veja a proposição 22 e o exercício 9 da aula 19).

Os círculos Γ e Γ' são as *bases do cilindro*, e cada segmento XX', quando $X \in \Gamma$, é chamado *geratriz do cilindro*.

A união das geratrizes de um cilindro é chamada de *superfície lateral*.

Se O e O' são os centros de Γ e Γ', respectivamente, a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é chamada de eixo do cilindro. Um cilindro é chamado *reto* se o seu eixo for perpendicular às bases. Caso contrário, o cilindro é chamado *oblíquo* (veja a figura 147).

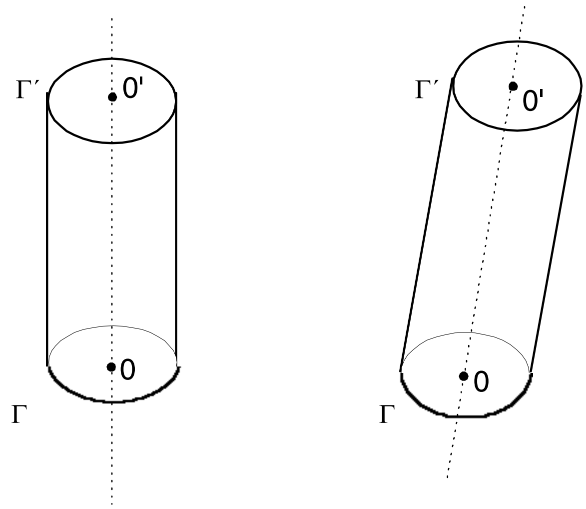

Fig. 147: Cilindro circular reto e oblíquo.

A *altura* de um cilindro é definida como a distância entre os planos das bases. Se o cilindro for reto, sua altura é exatamente a medida do segmento OO' que liga os centros das bases.

Chamamos de *seção meridiana* de um cilindro à interseção do cilindro com um plano que contém o seu eixo. As seções meridianas de um cilindro são paralelogramos (retângulos ou não). Justifique!

Para um cilindro circular reto, as seções meridianas são retângulos com medidas h (altura) e $2r$ (diâmetro da base) (veja a figura 148). Você pode imaginar um cilindro oblíquo com uma seção meridiana retangular?

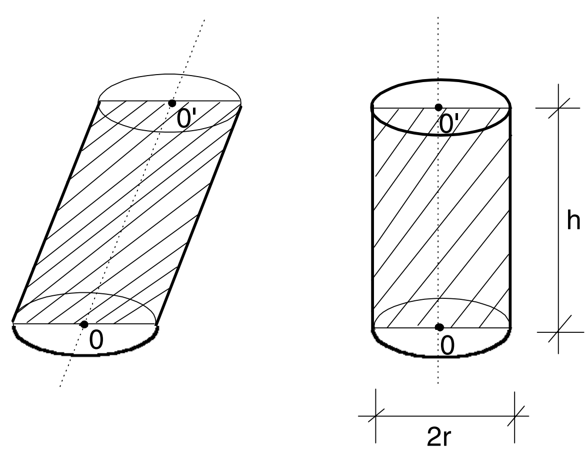

Fig. 148: Seções meridianas de cilindros oblíquos e retos.

Um cilindro é chamado *equilátero* se ele for reto e se sua seção meridiana for um quadrado (veja a figura 149).

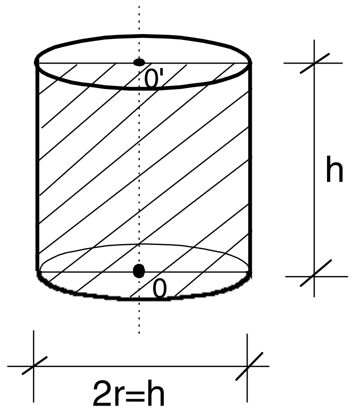

Fig. 149: Cilindro equilátero.

Plano tangente a um cilindro

Seja C um cilindro cujas bases são círculos Γ e Γ' de centros O e O', respectivamente. Sejam α e α' os planos das bases e AA' uma geratriz de C. Chame de r a reta tangente a Γ em A e seja γ o plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ e r (figura 150).

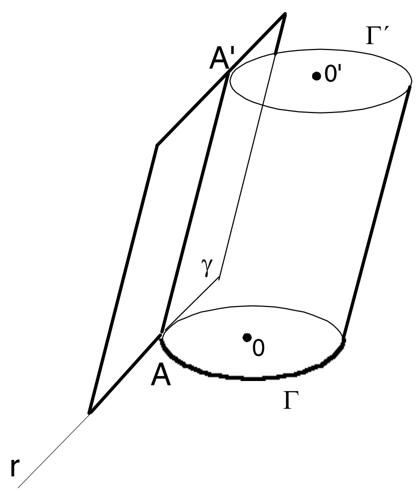

Fig. 150: Plano tangente.

Podemos mostrar que a interseção entre γ e o cilindro é exatamente o segmento AA' (veja exercício 8). Um plano cuja interseção com um cilindro é uma geratiz é chamado de *plano tangente*.

Com relação à figura 150, qualquer outro plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ intersecta o cilindro segundo um paralelogramo (veja a figura 151).

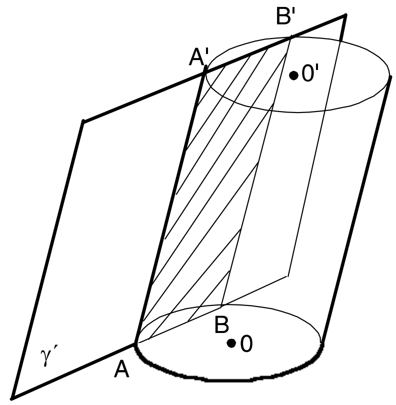

Fig. 151: Plano não tangente contendo uma geratriz.

Prisma inscrito em um cilindro e circunscrito a um cilindro

Dizemos que um prisma está inscrito em um cilindro se os planos de suas bases coincidem com os planos das bases do cilindro e se suas arestas laterais são geratrizes do cilindro (figura 152(a)).

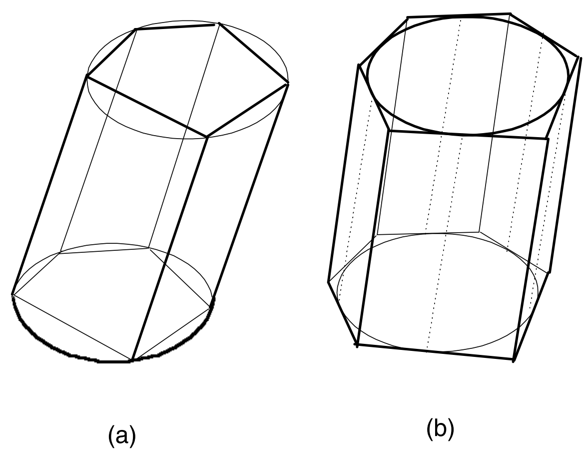

Fig. 152: (a) Prisma inscrito. (b) Prisma circunscrito.

Dizemos que um prisma está circunscrito a um cilindro se os planos de suas bases coincidem com os planos das bases do cilindro e se os planos de suas faces laterais são tangentes ao cilindro (figura 152(b)).

As linhas tracejadas na figura 152(b) indicam as geratrizes ao longo das quais as faces laterais do prisma tangenciam o cilindro.

Cone

Considere um círculo Γ contido em um plano α e seja A um ponto fora de α. Para cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace o segmento AX. A união dos segmentos AX é chamada de cone (veja a figura 153).

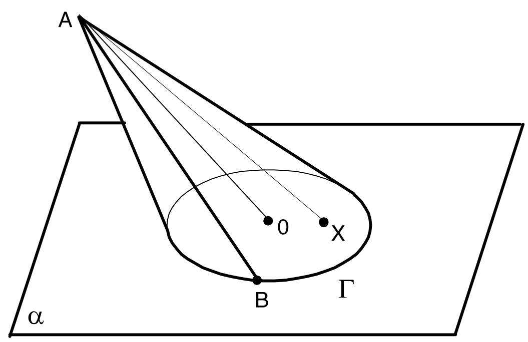

Fig. 153: Cone.

A união do círculo Γ, com seu interior, é chamado *base do cone* e o ponto A, *vértice do cone*. Uma *geratriz do cone* é um segmento ligando o vértice a um ponto de Γ. Na figura 153, AB é uma geratriz.

A reta contendo o vértice e o centro O de Γ é chamada de *eixo do cone*, e a união das geratrizes do cone é chamada *superfície lateral*. Um cone é chamado *reto* se o seu eixo for perpendicular ao plano da base. Caso contrário, o cone é chamado *oblíquo*. Veja a figura 154.

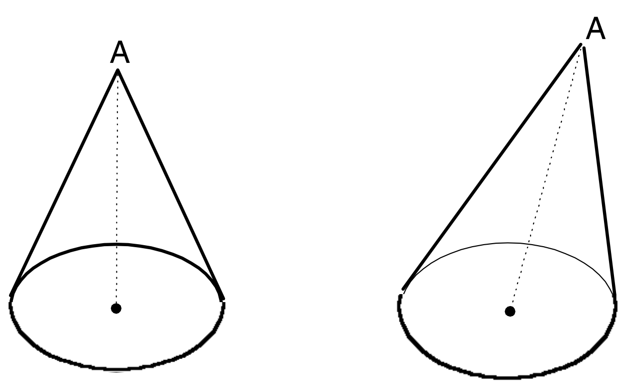

Fig. 154: (a) Cone reto (b) Cone oblíquo.

Chamamos de *altura do cone* a distância do vértice ao plano da base. Para cones retos, a altura é dada pela medida do segmento ligando o vértice ao centro da base.

A interseção do cone com um plano que contém o seu eixo é chamada *seção meridiana*. As seções meridianas de um cone reto são triângulos isósceles congruentes (veja a figura 155).

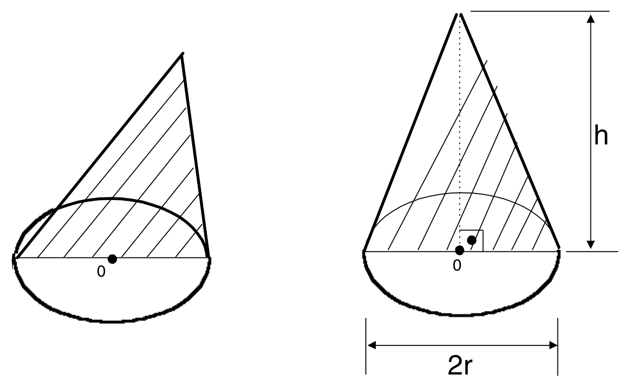

Fig. 155: Seções meridianas dos cones oblíquo e reto.

Um cone é chamado *equilátero* se ele for reto e sua seção meridiana for um triângulo equilátero (veja a figura 156).

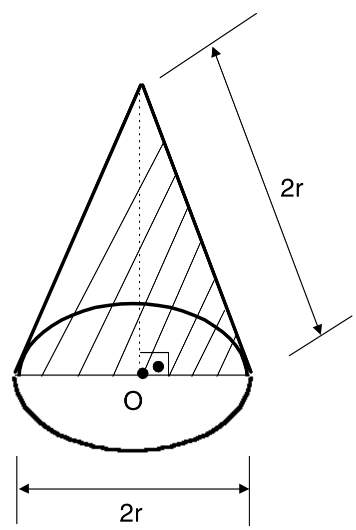

Fig. 156: Cone equilátero.

Considere um cone de vértice A e base Γ e sejam AB uma geratriz e r a reta tangente a Γ em B. Chame de γ o plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r. Pode-se mostrar (veja exercício 17) que a interseção de γ com o cone é exatamente a geratriz AB. Um plano que intersecta o cone segundo uma geratriz é chamado de *plano tangente*. Veja a figura 157.

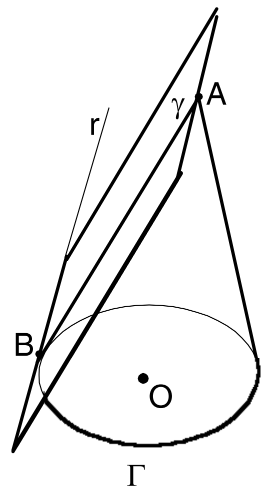

Fig. 157: Plano tangente.

Com relação à figura 157, qualquer outro plano que contém AB contém outra geratriz do cone e sua interseção com o cone é um triângulo (veja a figura 158).

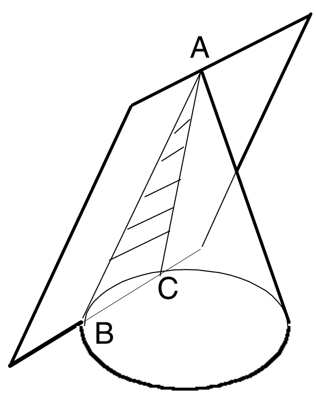

Fig. 158: Plano não tangente contendo AB.

Pirâmide inscrita em um cone e circunscrita a um cone

Dizemos que uma pirâmide está inscrita em um cone se o seu vértice coincide com o vértice do cone e se sua base for um polígono inscrito na base do cone (veja figura 159(a)). Nesse caso, as arestas laterais da pirâmide são geratrizes do cone.

Dizemos que uma pirâmide está circunscrita a um cone se o seu vértice coincide com o vértice do cone e se sua base for um polígono circunscrito à base do cone (figura 159(b)). Nesse caso, as faces laterais da pirâmide são tangentes ao cone.

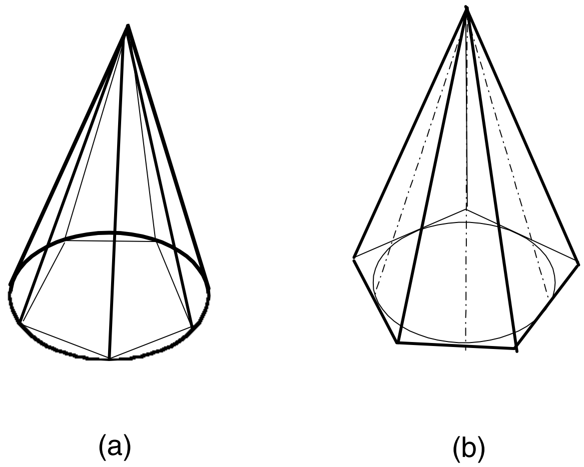

Fig. 159: (a) Pirâmide inscrita. (b) Pirâmide circunscrita.

As linhas tracejadas da figura 159(b) indicam as geratrizes segundo as quais as faces laterais da pirâmide tangenciam o cone.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- As definições de cilindro e de cone.
- Sobre os elementos de um cilindro e de um cone.
- Sobre prisma inscrito em um cilindro e circunscrito a um cilindro.
- Sobre pirâmide inscrita em um cone e circunscrita a um cone.

Exercícios

1. Determine a altura de um cilindro, sabendo que as geratrizes medem $20\,cm$ e que formam um ângulo de 60^o com o plano da base.
2. Um cilindro reto, com $10\,cm$ de altura e raio da base igual a $13\,cm$, é cortado por um plano paralelo ao eixo e distante $5\,cm$ desse eixo. Determine a área da seção plana determinada por esse plano.
3. Um cilindro reto, com $12\,cm$ de altura e raio da base igual a $4\,cm$, é cortado por um plano paralelo ao eixo, de modo que a seção plana determinada tem área igual à área da base. Determine a distância desse plano ao eixo.

4. Um plano secciona um cilindro reto paralelamente ao eixo e forma um arco de 60^o com a base do cilindro. Se a altura do cilindro é $20\,cm$ e a distância do plano ao eixo é de $4\,cm$, determine a área da seção.

5. A figura 160 mostra um cilindro reto, de $1\,m$ de altura e raio da base igual a $40\,cm$, inclinado de 45^o.

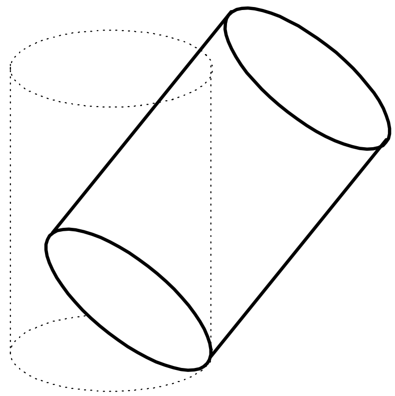

Fig. 160: Exercício 5.

Determine a altura do ponto mais alto do cilindro.

6. Considere a afirmativa: se cortarmos um cilindro reto por um plano inclinado em relação ao plano da base, a seção plana é um círculo. (veja a figura 161). A afirmativa é verdadeira ou falsa? Justifique.

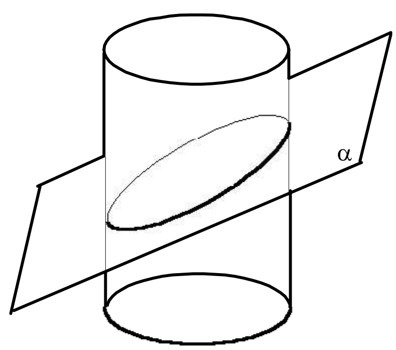

Fig. 161: Exercício 6.

7. Na figura 162, $ABCD$ é um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta e α é um plano paralelo ao plano de BCD. Seja $B'C'D'$ a seção determinada por α. Se a distância de α ao plano de BCD é metade da altura do tetraedro, determine a altura e o raio da base do cilindro reto que tem uma base no plano de BCD e a outra base está inscrita no triângulo $B'C'D'$.

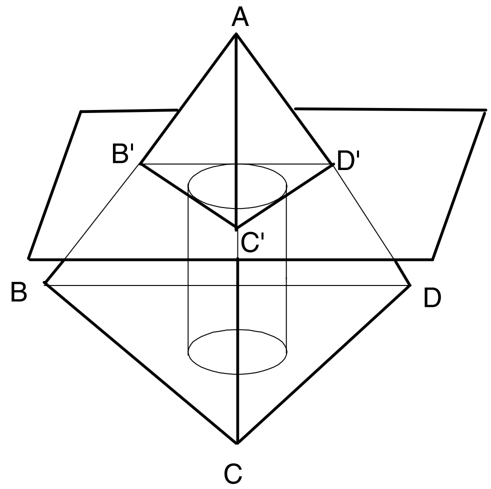

Fig. 162: Exercício 7.

8. Seja AA' uma geratriz de um cilindro e seja r a reta tangente a Γ em A, sendo Γ a base que contém A. Se γ é o plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ e r, prove que a interseção entre γ e o cilindro é exatamente o segmento AA'.

9. Determine o diâmetro da base de um cone reto de $24\,cm$ de altura, sabendo que sua geratriz mede $25\,cm$.

10. Um dado cone tem uma geratriz perpendicular ao plano da base medindo $15\,cm$. Se o diâmetro da base mede $8\,cm$, determine a medida da maior geratriz do cone.

11. Determine a altura de um cone reto, cujo raio da base mede $3\,cm$, sabendo que a área da seção meridiana é igual à área da base.

12. Um cone reto, de $10\,cm$ de altura e raio da base medindo $4\,cm$, é cortado por um plano perpendicular ao plano da base e distando $1\,cm$ do eixo do cone. Determine a maior distância entre um ponto da seção e o plano da base.

13. Um cilindro reto tem $4\,cm$ de altura e raio da base igual a $1\,cm$. Considere um cone cuja base coincide com uma base do cilindro e cujo vértice é o centro da outra base. Um plano paralelo às bases intersecta os sólidos de modo que a região exterior ao cone e interior ao cilindro tem área igual à metade da área da base do cilindro. Determine a distância desse plano ao plano da base do cone.

14. Em um cone reto de $4\,cm$ de altura está inscrita uma pirâmide hexagonal regular, cujo apótema mede $5\,cm$. Determine a área da seção meridiana do cone.

15. Um pedaço de papel, na forma de um setor circular de 72^o e raio igual a $5\,cm$, é dobrado (como na figura 163) até ser obtido um cone.

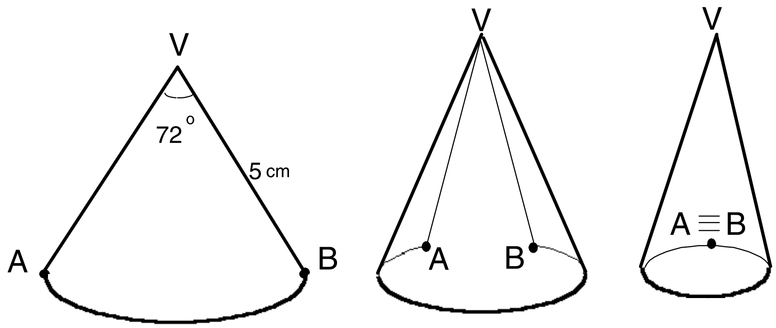

Fig. 163: Exercício 15.

Determine a altura do cone.

16. Se o raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto constituem, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão igual a 1, determine a altura do cone.

17. Considere um cone de vértice A e base Γ e seja B um ponto pertencente a Γ. Seja r a reta tangente a Γ em B e chame de γ o plano que contém r e $\overleftrightarrow{AB}$. Prove que a interseção entre γ e o cone é exatamente a geratriz AB.

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula, estudaremos um sólido cuja superfície não contém segmentos de reta.