Geometria Espacial - EP Aula 23 - Gabarito

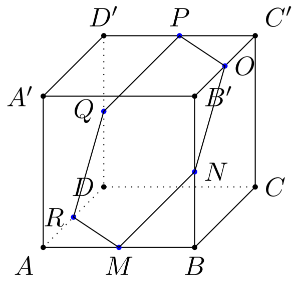
Exercício 1. Considere um cubo $ABCD - A'B'C'D'$ e os pontos M, N, O, P, Q e R médios dos segmentos AB, BB', $B'C'$, $C'D'$, $D'D$ e DA, respectivamente.

a) Desenhe o cubo e marque os pontos descritos no enunciado.

b) Explique em detalhes por que a pirâmide $A' - MNOPQR$ é regular.

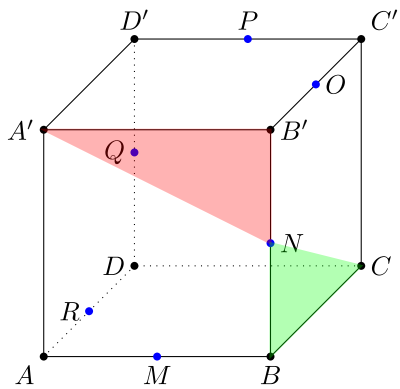
Solução:

a)



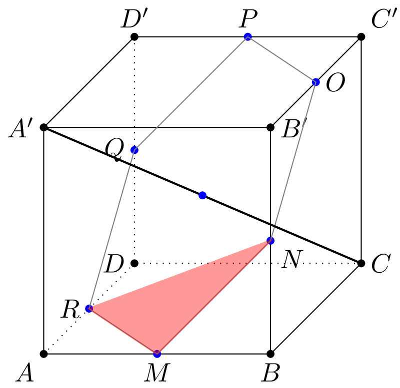
b) Aqui é importante lembrar que uma pirâmide regular tem como base um polígono plano regular e que a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Inicialmente vamos mostrar que o polígono da base é um polígono plano. Todos os pontos azuis estão no plano mediador do segmento $A'C$ pois estão à mesma distância de A' e de C (veja a Exercício 4 do EP3). De fato, observe que para $X \in \{M, N, O, P, Q, R\}$ temos que tanto $A'X$ como CX são hipotenusas de triângulos retângulos com catetos de medidas iguais ao lado do cubo e à metade do lado do cubo. Portanto, $A'X = CX$. A figura a seguir ilustra a situação em que $X = N$. Os triângulos $A'B'N$ e CBN são retângulos e possuem catetos respectivamente congruentes, logo as hipotenusas $A'N$ e CN são iguais. Os outros casos são inteiramente análogos. Isso mostra que os seis vértices do hexágono pertencem ao plano mediador do segmento $A'C$.



Um polígono regular é equilátero e equiângulo (tem todos os ângulos internos iguais). Para isso basta mostrar que os triângulos MNO, NOP, OPQ, PQR, QRM e RMN são congruentes, pois isso implica que $MN = NO = OP = PQ = QR = RM$ e que $\widehat{MNO} = \widehat{NOP} = \widehat{OPQ} = \widehat{PQR} = \widehat{QRM} = \widehat{RMN}$.

As congruências podem ser verificadas por lado-lado-lado, uma vez que os comprimentos dos três lados de cada triângulo podem ser calculados por meio do Teorema de Pitágoras. Faremos aqui o cálculo das medidas dos lados do triângulo RMN, os demais podem ser feitos da mesma maneira.



Temos $MN = RM = a\sqrt{2}/2$, o que pode ser obtido do Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos RAM e MBN. A medida RN pode ser obtida do Teorema de Pitágoras no triângulo RBN, retângulo em B, temos

$$RN^2 = RB^2 + BN^2 \Rightarrow RN^2 = (RA^2 + AB^2) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow RN^2 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\right) + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2},$$

na segunda igualdade, usamos o Teorema de Pitágoras em RAB para calcular a medida de RB.

Finalmente, a projeção ortogonal do vértice A' da pirâmide sobre o plano da base é o centro da base pois como o plano da base é o plano mediador de $A'C$, esse plano é perpendicular ao segmento $A'C$, logo a projeção ortogonal de A' sobre o plano é a interseção do segmento com o plano. Esse ponto de interseção é o centro do hexágono pois é equidistante de seus vértices.

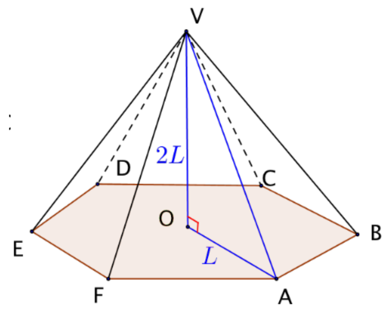
Exercício 2. Considere uma pirâmide regular de base hexagonal. O hexágono regular tem lado medindo Lcm e a altura mede o dobro do lado da base.

a) Desenhe a figura.

b) Qual é a área lateral desta pirâmide?

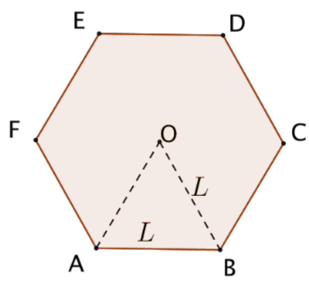
Solução:

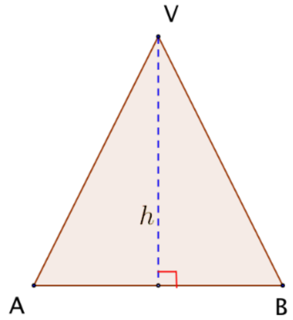
a)



b) As faces laterais desta pirâmide são triângulos isósceles congruentes entre si, de base $L\,cm$. Precisamos encontrar o lado destes triângulos para encontrarmos sua área. Considere a pirâmide regular de base hexagonal $V - ABCDEF$. Seja O o centro do hexágono regular da base desta pirâmide. Então a distância de qualquer vértice do hexágono a O é igual ao lado do hexágono (por exemplo, o triângulo

ABO é equilátero e, portanto, $AO = BO = L\,cm$.)





Como a pirâmide é regular, o segmento VO é perpendicular ao plano que contém a base $ABCDDEF$, com isso o triângulo AVO é retângulo em O e, pelo Teorema de Pitágoras, $AV^2 = OV^2 + OA^2$, isto é, $AV^2 = (2L)^2 + L^2$, de onde conclui-se que $AV = L\sqrt{5}$. Como todas as arestas laterais são congruentes, cada uma delas mede $L\sqrt{5}$.

Considere a face lateral ABV, a altura deste triângulo com respeito ao lado AB é dada por $h^2 = AV^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)$, logo $h = \frac{\sqrt{19}}{2}L\,cm$. E, portanto, a área de ABV é $\frac{AB\cdot h}{2} = \frac{\sqrt{19}}{4}L^2\,cm^2$. Consequentemente a área lateral da pirâmide é $6 \cdot \frac{\sqrt{19}}{4}L^2 = \frac{3\sqrt{19}}{2}L^2\,cm^2$.

Exercício 3. Seja $ABCD$ um tetraedro regular cujas arestas medem Lcm. Calcule:

a) Desenhe o tetraedro.

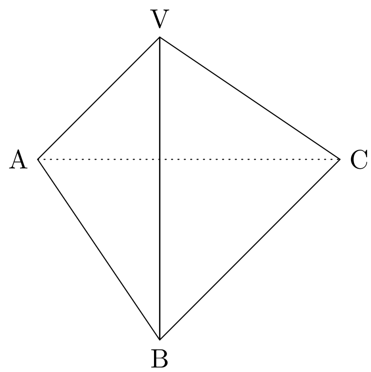
b) A altura deste tetraedro.

c) O apótema de $ABCD$.

d) A área total de $ABCD$.

Solução:

a)



b) Seja O o centro do triângulo equilátero da base ABC. Então, como as arestas deste triângulo medem L, e como neste caso O é o baricentro de ABC, segue que $AO = BO = OC = \frac{\sqrt{3}}{3}L\,cm$. Como o tetraedro é regular sua altura é OV . Assim, o triângulo VAO é retângulo em O e por Pitágoras, $OV^2 = AV^2 - AO^2$, logo $OV = \sqrt{\frac{2}{3}}L\,cm$.

c) Seja M o ponto médio do lado da base AB. Um dos apótemas é o segmento VM. Como O é o baricentro de ABC, segue que $OM = \frac{1}{3}MC = \frac{\sqrt{3}}{6}L\,cm$. Como a pirâmide é regular, temos que VOM é triângulo retângulo em O, e por Pitágoras, $VM^2 = OV^2 + OM^2$, logo $VM = \frac{\sqrt{3}}{2}L\,cm$.

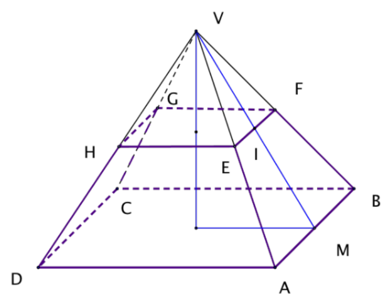
d) A área do triângulo ABC é $\frac{AB \cdot VM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2\,cm^2$. Portanto, a área lateral do tetraedro regular de lado L é $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \sqrt{3}L^2\,cm^2$.

Exercício 4. A pirâmide $V - ABCD$ regular de base quadrangular foi cortada na metade de sua altura por um plano paralelo ao plano da base. Sabendo-se que o lado do quadrado da base mede 8 cm e que a altura desta pirâmide é $6\sqrt{5}$cm. Calcule a área lateral do tronco de pirâmide formado.

Solução: Observe que ao cortarmos a pirâmide na metade de sua altura por um plano paralelo ao plano de base, pelo Teorema de Tales, criamos um tronco de pirâmide $ABCDEFGH$ de modo que E é o ponto médio de AV, F é o ponto médio de BV, G é o ponto médio de CV e H é o ponto médio de DV. Além disso, se M é o ponto médio do lado AB, o segmento VM corta o segmento EF em um ponto I de modo que $VM = 2IM$ e IM é a altura do trapézio $AEFB$.

Vamos calcular IM. Seja O, o centro do quadrado $ABCD$. Note que VOM é retângulo em O e, portanto, $VM^2 = OM^2 + OV^2$, logo $VM = 14\,cm$, portanto, $IM = 7\,cm$.

Como as faces laterais deste tronco de pirâmide são trapézios conguentes temos que a área lateral deste tronco de pirâmide é 4 vezes a área de $ABFE$, onde $ABFE$ denota a área do trapézio $ABFE$. Como temos a semelhança de triângulos $VAB \sim VEF$ e $VA = 2VE$, temos que $AB = 2EF$, logo $EF = 4$. Assim, a área lateral procurada é $4 \cdot \dfrac{(AB + EF)IM}{2} = 168\,cm^2$.



Exercício 5. Existe alguma pirâmide em que uma das faces laterais pode ser tomada por base da pirâmide? Justifique a sua resposta.

Solução: As faces laterais de uma pirâmide sempre são triângulos. Como uma pirâmide só possui faces laterais e a base, se uma uma face lateral for tomada por base, então a base será base lateral, de modo que a base precisa ser um triângulo. Conclusão: os tetraedros são as únicas pirâmides em que as faces laterais podem ser tomadas por base. Mais ainda, qualquer face lateral pode ser considerada uma base da pirâmide.

Exercício 6.

a) Quando dois polígonos planos são semelhantes? Apresente a definição que será utilizada no próximo item.

b) Dada uma pirâmide de vértice V e altura H, prove que a seção dessa pirâmide por um plano α paralelo ao da base é um polígono semelhante à base com razão de semelhança igual a h/H onde h é a distância de V ao plano α e H é a altura da pirâmide. (Você pode supor que a base da pirâmide é um pentágono para tornar a sua solução mais concreta).

Solução:

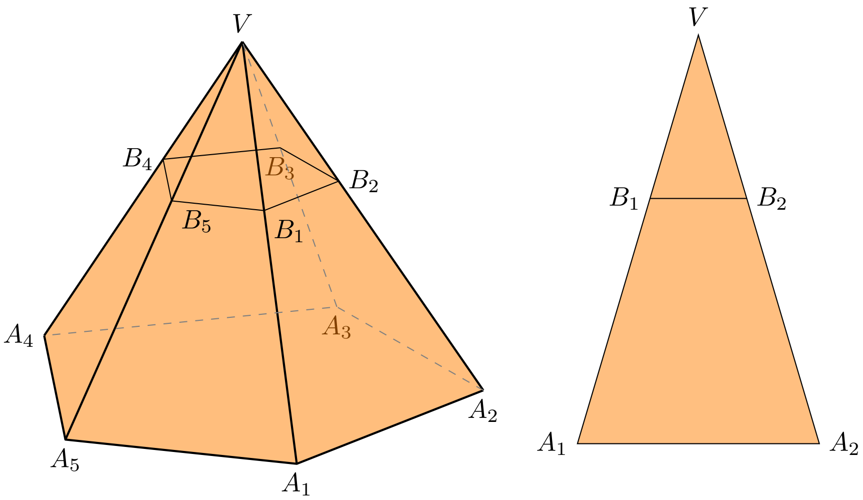
a) Dizemos que os polígonos planos $\mathcal{P} = A_1A_2\cdots A_n$ e $\mathcal{Q} = B_1B_2\cdots B_n$ (nesta ordem) são semelhantes com razão de semelhança k, quando existe uma correspondência bijetiva (ou biunívoca) entre os vértices de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{Q}$ de modo que as condições a seguir são satisfeitas:

(i) a razão entre lados correspondentes seja k, isto é,

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \cdots = \frac{B_{n-1}B_n}{A_{n-1}A_n} = \frac{B_nB_1}{A_nA_1} = k.$$

(ii) os ângulos internos em vértices correspondentes são iguais, isto é, $\widehat{A_i} = \widehat{B_i}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

b) Provaremos o caso particular da pirâmide pentagonal, mas o mesmo raciocínio serve em pirâmide de qualquer base. Considere uma pirâmide pentagonal $V - A_1A_2A_3A_4A_5$ como na figura. Digamos que o plano α paralelo à base da pirâmide, intersecta a pirâmide formando o pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$. Vamos mostrar que os polígonos $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$ e $\mathcal{Q} = B_1B_2B_3B_4B_5$ são semelhantes com razão de semelhança h/H (linguagem do enunciado).



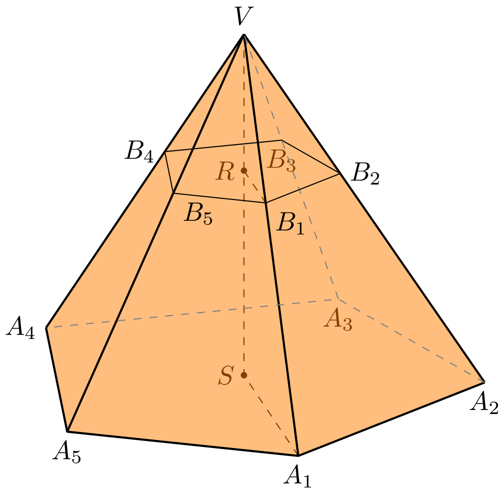
As retas B_1B_2 e A_1A_2 são paralelas pois são coplanares, uma vez que ambas estão no plano VA_1A_2, mas não podem ser intersectar pois estão contidas nos planos paralelos α e $A_1A_2A_3$ (o plano da base). Portanto, os triângulos VA_1A_2 e VB_1B_2 são semelhantes com razão de semelhança

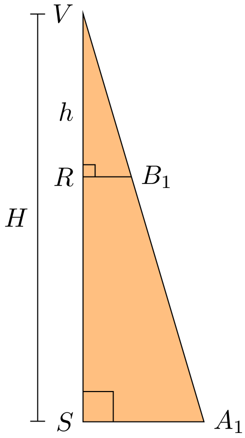
$$\frac{VB_1}{VA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{VB_2}{VA_2}. \tag{1}$$

Vamos mostrar agora que $VB_1/VA_1 = h/H$.

Sejam R e S os pés das perpendiculares baixadas de V sobre os planos α e da base, respectivamente. Temos que os triângulos VRB_1 e VSA_1 são retângulos e semelhantes por ângulo-ângulo uma vez que além do ângulo reto compartilham o ângulo $\widehat{RVB_1}$. Como $VR = h$ e $VS = H$, a razão de semelhança é

$$\frac{h}{H} = \frac{VR}{VS} = \frac{VB_1}{VA_1} = \frac{RB_1}{SA_1}. \tag{2}$$





Portanto, juntando as equações (1) e (2) obtém-se que

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{h}{H}.$$

Como se pode imaginar, não há nada de especial nos lados homólogos A_1A_2 e B_1B_2 na construção, portanto, cálculos análogos mostram que

$$\frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{h}{H}, \quad \frac{B_2B_4}{A_3A_4} = \frac{h}{H} \quad \frac{B_4B_5}{A_4A_5} = \frac{h}{H}, \quad \frac{B_5B_1}{A_5A_1} = \frac{h}{H},$$

de onde se conclui a parte (i) da definição.

Para mostrar que os ângulos $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, vamos justificar que os triângulos B_1B_2B5 e $A_1A_2A_5$ são semelhantes por lado-lado-lado. Isto é, vamos mostrar que

$$\frac{B_5B_1}{A_5A_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_5}{A_2A_5}. \tag{3}$$

A primeira igualdade decorre do que já provamos em (i). Para mostrar a segunda igualdade, observe que VA_2A_5 e VB_2B_5 são semelhantes com razão de semelhança h/H. De onde se conclui que $h/H = B_2B_5/A_2A_5$ e, portanto, vale a segunda igualdade de (3). Como os triângulos B_1B_2B5 e $A_1A_2A_5$ são semelhantes, os ângulos em vértices correspondentes são iguais. Conclusão $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.
Os demais casos são análogos e isso conclui a justificativa de (ii).