Aula 22 – O prisma

Objetivos

- Identificar e classificar prismas.
- Conhecer propriedades de prismas.

Introdução

A partir desta aula, estaremos estudando alguns dos principais *sólidos geométricos*: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Veremos os principais elementos desses sólidos, e algumas de suas propriedades.

Definição 12

Sejam α e α' dois planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja $P = A_1A_2 \ldots A_n$ um polígono convexo contido em α. Por todo ponto X pertencente ao polígono ou ao seu interior, trace a reta paralela a r passando por X, e seja X' o ponto em que essa reta corta o plano α'. A figura formada pela união dos segmentos XX' é chamada de prisma. Veja na figura 119 o caso particular em que o polígono P é um pentágono.

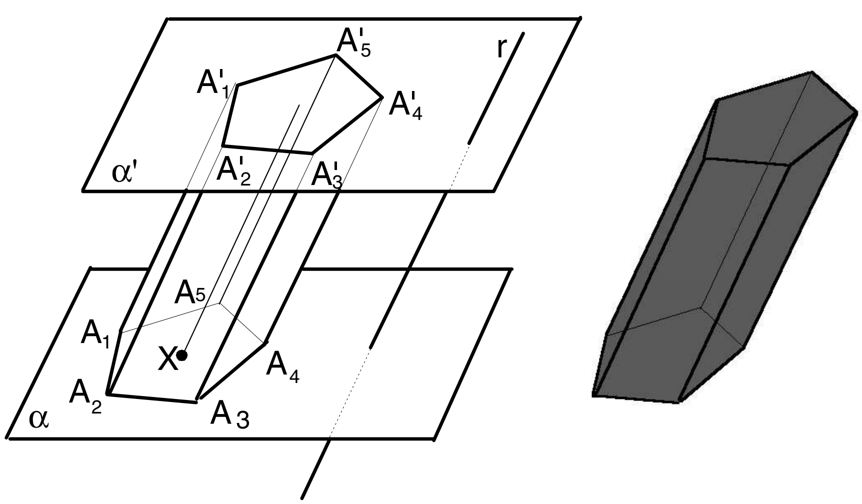

Fig. 119: Prisma de base pentagonal.

Os polígonos $P = A_1A_2 \ldots A_n$ e $P' = A_1'A_2' \ldots A_n'$, unidos com seus interiores, são chamados bases do prisma, enquanto os quadriláteros $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A_n'$, unidos com seus interiores, são chamados *faces laterais* do prisma. Chamamos de fronteira do prisma à união de suas bases e suas faces laterais. De acordo com a aula 21, P' é congruente a P, e as faces laterais do prisma são paralelogramos.

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1'A_2', \ldots A_n'$ são chamados vértices, e os segmentos A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n' são chamados arestas laterais. Como as faces laterais de um prisma são paralelogramos, tem-se que as arestas laterais são todas congruentes.

Um prisma é chamado reto se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Caso contrário o prisma é chamado oblíquo (veja a figura 120). As faces laterais de um prisma reto são retângulos.

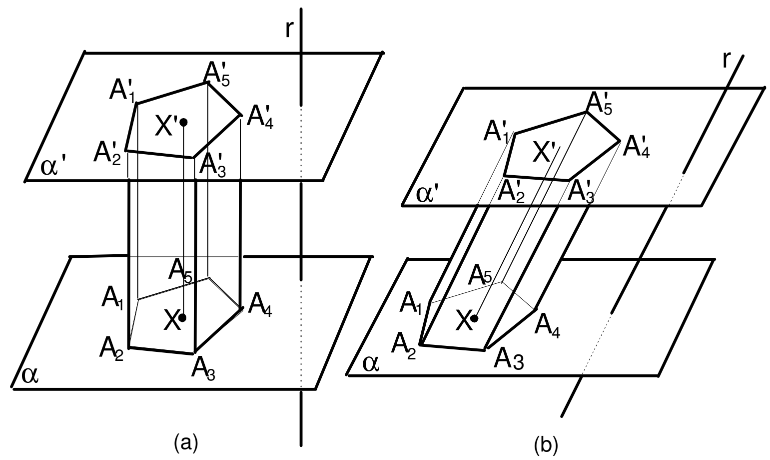

Fig. 120: (a) Prisma reto. (b) Prisma oblíquo.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das bases. Tem-se que a altura de um prisma reto é a medida de cada uma de suas arestas laterais. A área lateral de um prisma é definida como a soma das áreas de suas faces laterais. A área total de um prisma é a soma da área lateral com as áreas de suas bases.

A área lateral de um prisma reto é facilmente calculada. Suponha que o prisma reto tenha altura h e base $P = A_1A_2 \ldots A_n$. Como as faces laterais do prisma reto são retângulos, temos

$$\begin{aligned}
\text{Área lateral} &= \text{Área}(A_1A_2A_2'A_1') + \ldots + \text{Área}(A_nA_1A_1'A_n') \\
&= m(A_1A_2)h + \ldots + m(A_nA_1)h \\
&= [m(A_1A_2) + \ldots + m(A_nA_1)]\,h \\
&= (\text{perímetro de } P)h
\end{aligned}$$

Assim,

> A área lateral de um prisma reto é o produto do perímetro da base pela altura.

Veremos agora um tipo especial de prisma: o paralelepípedo.

O paralelepípedo

Definição 13
Um prisma cujas bases são paralelogramos é chamado paralelepípedo.

Como já sabemos que as faces laterais de qualquer prisma são paralelogramos, segue que todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos. Um paralelepípedo reto é dito retangular (ou retângulo) se suas bases são retângulos. Como já sabemos que as faces laterais de qualquer prisma reto são retângulos, resulta que todas as faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos (veja a figura 121). Um *cubo* é um paralelepípedo retangular que tem todas as arestas congruentes.

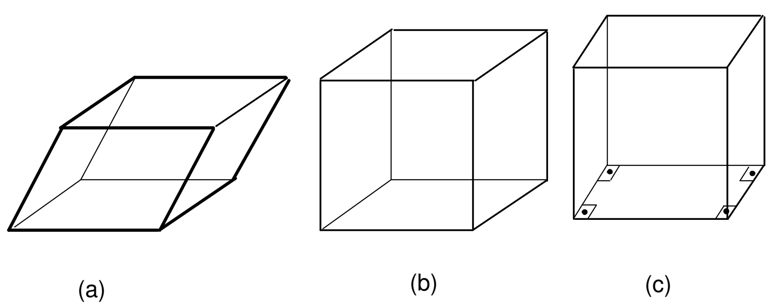

Fig. 121: Tipos de paralelepípedo. a) Oblíquo. b) reto. c) retangular.

Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Um paralelogramo possui quatro diagonais, representadas na figura 122.

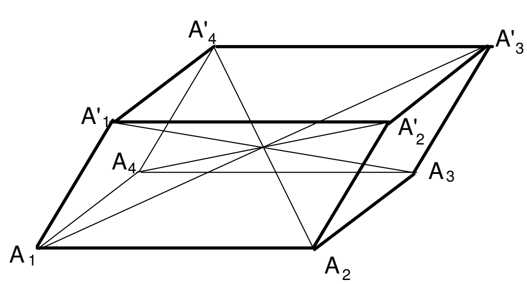

Fig. 122: Diagonais de um paralelepípedo.

Duas faces de um paralelepípedo são chamadas opostas se elas não possuem nenhum vértice em comum. Assim são opostas as faces $A_2A_3A_3'A_2'$ e $A_1A_4A_4'A_1'$ na figura 122, assim como os seguintes pares de faces: $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$, $A_1A_2A_3A_4$ e $A_1'A_2'A_3'A_4'$ (bases).

A figura 122 parece sugerir que as diagonais de um paralelepípedo são concorrentes, ou seja, passam por um mesmo ponto. A proposição a seguir diz que, de fato, isso sempre ocorre:

Proposição 35

As diagonais de um paralelepípedo cortam-se em um ponto e esse ponto divide cada uma delas ao meio.

Prova:

Considere as diagonais A_4A_2' e A_1A_3' mostradas na figura 123. Como todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos e os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, conclui-se que $\overleftrightarrow{A_2'A_3'}//\overleftrightarrow{A_2A_3}$, $\overleftrightarrow{A_2A_3}//\overleftrightarrow{A_1A_4}$, $A_2'A_3' \equiv A_2A_3$ e $A_2A_3 \equiv A_1A_4$.

Segue que $\overleftrightarrow{A_2'A_3'}//\overleftrightarrow{A_1A_4}$ e que $A_1A_4 \equiv A_2'A_3'$. Logo, os pontos A_1, A_4, A_2' e A_3' são coplanares e o quadrilátero $A_1A_4A_3'A_2'$ possui um par de lados opostos paralelos e congruentes (A_1A_4 e $A_2'A_3'$). Pela proposição 13 da aula 6, podemos afirmar que $A_1A_4A_3'A_2'$ é um paralelogramo. Suas diagonais A_4A_2' e A_1A_3' (veja o exercício 5 da aula 6), portanto, se cortam em um ponto T que as divide ao meio (veja a figura 123).

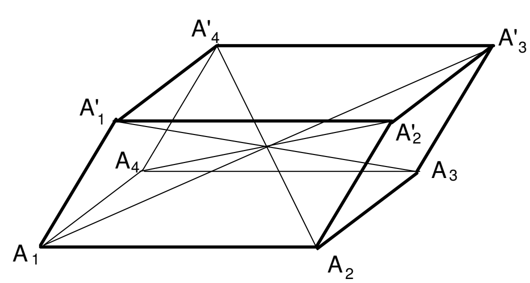

Fig. 123: Encontro das diagonais A_1A_3' e A_4A_2'.

Considere agora as diagonais A_1A_3' e A_2A_4'. De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, prova-se que os pontos A_1, A_2, A_3' e A_4' são coplanares e são os vértices de um paralelogramo. Chamemos de R ao ponto em que as diagonais do paralelogramo $A_1A_2A_3'A_4'$ se cortam (ponto médio das diagonais). Veja a figura 124.

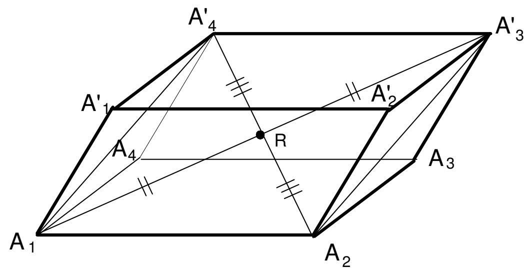

Fig. 124: Encontro das diagonais A_1A_3' e A_2A_4'.

Temos que tanto o ponto T quanto o ponto R dividem o segmento A_1A_3' ao meio. Logo, $T = R$ e, portanto, as três diagonais A_1A_3', A_4A_2' e A_2A_4' passam por T. Além disso, o ponto T divide essas diagonais ao meio. Da mesma forma, considerando as diagonais A_1A_3' e A_3A_1', conclui-se que A_3A_1' também passa por T e que o ponto T divide A_3A_1' ao meio. Q.E.D.

Para paralelepípedos, vale também o seguinte resultado:

Proposição 36

As faces opostas de um paralelepípedo são paralelas e congruentes.

Prova:

Considere um paralelepípedo como na figura 122. Provaremos que os planos das faces $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$ são paralelos e que essas faces são congruentes. Para os outros pares de faces opostas a demonstração é idêntica.

Como todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos, tem-se $\overleftrightarrow{A_4A_4'}//\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ e $\overleftrightarrow{A_4A_3}//\overleftrightarrow{A_1A_2}$. Segue que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ é paralela ao plano que contém $A_4A_3A_3'A_4'$, pois não está contida em tal plano e é paralela a uma reta dele (a reta $\overleftrightarrow{A_4A_4'}$). Do mesmo modo, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ é paralela ao plano de $A_4A_3A_3'A_4'$, pois não está contida nele e é paralela a $\overleftrightarrow{A_4A_3}$ (estamos usando a proposição 13 da aula 18). Então o plano de $A_4A_3A_3'A_4'$ é paralelo ao plano de $A_1A_2A_2'A_1'$, pois é paralelo a duas retas concorrentes dele.

Resta agora verificar que as faces $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$ são congruentes. Para isso, trace os segmentos $A_1'A_2$ e $A_4'A_3$ (veja a figura 125). Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, segue que $A_1A_1' \equiv A_4A_4'$, $A_1A_1' \equiv A_2A_2'$ e $A_2A_2' \equiv A_3A_3'$. Da mesma forma, os segmentos A_1A_2, A_4A_3, $A_4'A_3'$ e $A_1'A_2'$ são congruentes.

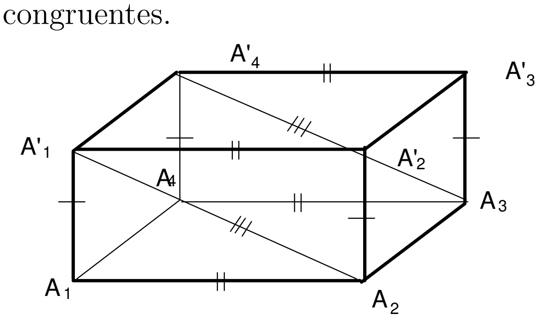

Fig. 125: Prova da proposição 28.

Como $\overleftrightarrow{A'_1A'_4} // \overleftrightarrow{A_1A_4}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_4} // \overleftrightarrow{A_2A_3}$, tem-se $\overleftrightarrow{A'_1A'_4} // \overleftrightarrow{A_2A_3}$, o que implica que A_2, A_3, A'_1 e A'_4 são coplanares. Além disso, $A'_1A'_4 \equiv A'_2A'_3 \equiv A_2A_3$. Os lados opostos $A'_1A'_4$ e A_2A_3 do quadrilátero $A_2A_3A'_4A'_1$ são assim paralelos e congruentes, ou seja, $A_2A_3A'_4A'_1$ é um paralelogramo. Daí $A_3A'_4 \equiv A_2A'_1$, e segue de L.L.L. que $A'_1A_1A_2 \equiv A'_4A_4A_3$ e $A'_1A'_2A_2 \equiv A'_4A'_3A_3$. Logo, $A_1A_2A'_2A'_1$ e $A_4A_3A'_3A'_4$ são congruentes. Q.E.D.

Considere um paralelepípedo $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$ e sejam $a = m(A_1A_2)$, $b = m(A_1A_4)$ e $c = m(A_1A'_1)$. Pelos argumentos utilizados anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} m(A_1A_2) &= m(A_4A_3) = m(A'_4A'_3) = m(A'_1A'_2) = a \\ m(A_1A_4) &= m(A_2A_3) = m(A'_2A'_3) = m(A'_1A'_4) = b \qquad \text{e} \\ m(A_1A'_1) &= m(A_2A'_2) = m(A_3A'_3) = m(A_4A'_4) = c \end{aligned}$$

Chamamos os números a, b e c de *medidas do paralelepípedo*. Em paralelepípedos retângulos temos o seguinte resultado:

Proposição 37

Se as medidas de um paralelepípedo retângulo são a, b e c, então as suas diagonais medem $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Prova:

Considere um paralelepípedo retangular $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$ com medidas a, b e c. Trace a diagonal $A_2A'_4$ e o segmento A_2A_4, como na figura 126.

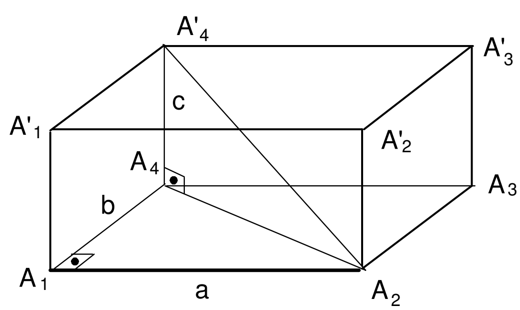

Fig. 126: Medida da diagonal do paralelepípedo retângulo.

Lembre-se de que em um paralelepípedo retangular as bases são retângulos e as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Isso implica que os triângulos $A_1A_4A_2$ e $A_4A'_4A_2$ são triângulos retângulos, com hipotenusas A_4A_2 e A'_4A_2, respectivamente. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} m(A_4A_2)^2 &= m(A_1A_4)^2 + m(A_1A_2)^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{e} \\ m(A'_4A_2)^2 &= m(A_4A_2)^2 + m(A_4A'_4)^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Logo, $m(A'_4A_2) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. A prova para as outras diagonais é inteiramente análoga. Q.E.D.

Resumo

Nessa aula você aprendeu...

- A definição de prisma.
- Um caso particular importante de prisma: o paralelepípedo.
- Como calcular a área lateral de um prisma reto.
- Que as diagonais de um paralelepípedo se encontram em um ponto que as divide ao meio.

Exercícios

1. Determine a natureza de um prisma (isto é, se o prisma é triangular, quadrangular etc.), sabendo que a soma dos ângulos de todas as suas faces vale 2880^o.

2. Determine a área do triângulo $A_1A_2'A_4'$ da figura 127, sabendo que o lado do cubo mede $10\,cm$.

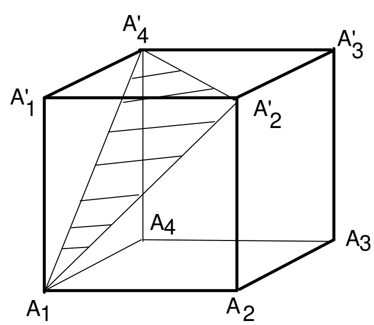

Fig. 127: Exercício 2.

3. Determine a área do triângulo $A_2A_3A_1'$ do cubo da figura 128, sabendo que o lado do cubo mede $10\,cm$.

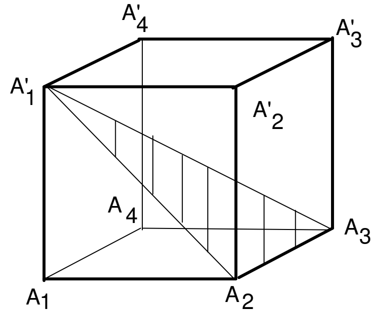

Fig. 128: Exercício 3.

4. Determine a área do triângulo $A_1A_2'A_5'$ no prisma reto da figura 129, sabendo que a base é um pentágono regular de $1\,m$ de lado e que as arestas laterais medem $2\,m$.

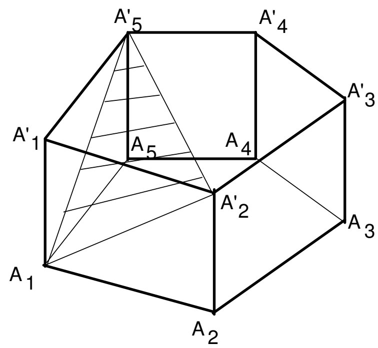

Fig. 129: Exercício 4.

5. Em relação ao prisma do exercício anterior, determine a área do triângulo $A_1A_2'A_4'$.

6. Determine a área total de um paralelepípedo retangular, sabendo que sua diagonal mede $25\sqrt{2}\,cm$ e que a soma de suas dimensões vale $60\,cm$.

7. (UFES - 1982) Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta a. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento:

   (a) $a\sqrt{2}$ (b) $a\sqrt{3}$ (c) $3a$ (d) $(1+\sqrt{2})a$ (e) $a\sqrt{5}$

8. Determine os ângulos internos do triângulo $A_1A_2'A_4'$ do exercício 2. Determine $tg(A_2\widehat{A_3}A_1')$, sendo $A_2A_3A_1'$ o triângulo do exercício 3.

9. (CESGRANRIO-1982)

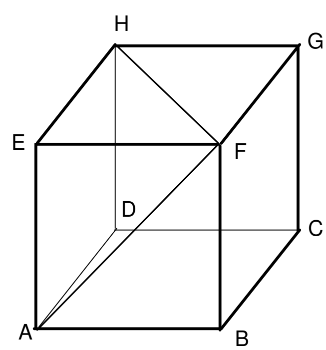

Fig. 130: Exercício 9.

O ângulo formado pelas diagonais AF e FH do cubo da figura 130 mede:

(a) 30^o (b) 45^o (c) 60^o (d) 90^o (e) 108^o

10. A figura 131 mostra um paralelepípedo retangular de medidas 3, 2 e 1. Determine a distância do ponto G ao plano determinado pelos pontos C, E e H.

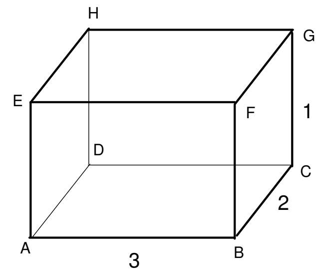

Fig. 131: Exercício 10.

11. (FATEC, 1987) Na figura 132, tem-se um prisma reto cuja diagonal principal mede $3a\sqrt{2}$.

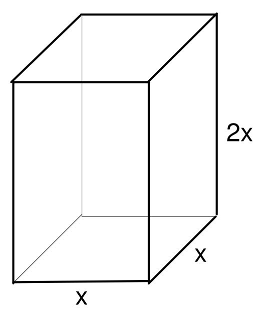

Fig. 132: Exercício 11.

A área total desse prisma é:

(a) $30\,a^2$ (b) $24\,a^2$ (c) $18\,a^2$ (d) $12\,a^2$ (e) $6\,a^2$

12. (U.F. VIÇOSA - 1990) A figura 133 mostra um paralelepípedo de base quadrada. Sabe-se que um plano intersecta esse paralelepípedo. Dessa interseção, resulta o quadrilátero $MNOP$, cujos lados ON e OP formam ângulos de 30^o com a face $ABCD$.

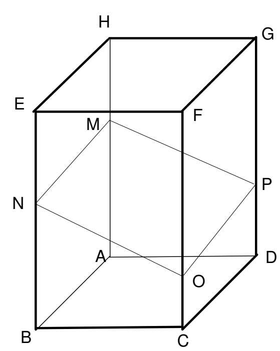

Fig. 133: Exercício 12.

Se a área da base do paralelepípedo vale 3, então o perímetro de $MNOP$ vale:

(a) 8 (b) 4 (c) 6 (d) 10 (e) 12

13. (FUVEST-FGV, 1991) Na figura 134, I e J são os centros das faces $BCGF$ e $EFGH$ do cubo $ABCDEFGH$ de aresta a.

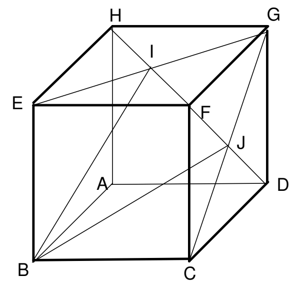

Fig. 134: Exercício 13.

Os comprimentos dos segmentos AI e IJ são, respectivamente:

(a) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $a\sqrt{2}$ (b) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (c) $a\sqrt{6}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

(d) $a\sqrt{6}$, $a\sqrt{2}$ (e) $2a$, $\dfrac{a}{2}$

14. (UFF) Em um cubo de aresta ℓ, a distância entre o ponto de encontro de suas diagonais e qualquer de suas arestas é:

(a) $\ell\sqrt{3}$ (b) $\ell\sqrt{2}$ (c) $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (d) $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$ (e) $\dfrac{\ell}{2}$