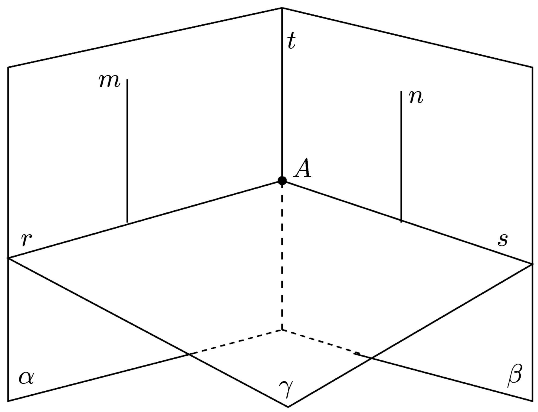
Aula 21

1. - Falsa
   - Verdadeira
   - Falsa
   - Verdadeira

2.



$\alpha \cap \beta = t$

$\gamma \cap \alpha = r \Rightarrow \gamma \perp \alpha$

$\gamma \cap \beta = s \Rightarrow \gamma \perp \beta$

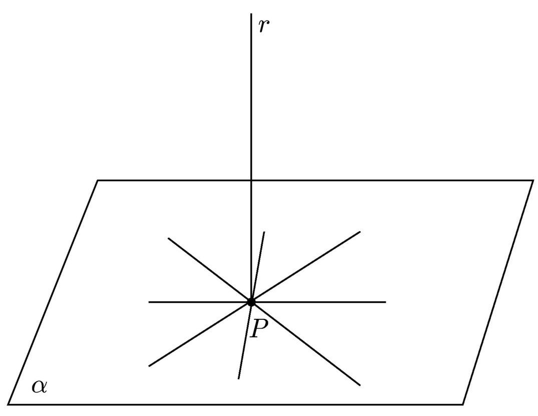
$r \cap s = A$ e $A \in t$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Seja } m \in \alpha \text{ e } m \perp r \Rightarrow m \perp \gamma \\ \text{e seja } n \in \beta \text{ e } n \perp s \Rightarrow n \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow n \parallel m$$

Então $m \parallel \beta$ e $n \parallel \alpha$.

Seja $l \parallel m$ e $l \parallel n$ tal que $l \notin \alpha$ e $l \notin \beta \Rightarrow l \parallel \alpha$ e $l \parallel \beta \Rightarrow l \parallel t \Rightarrow t \parallel n$ e $t \parallel m$. Então $t \perp \gamma$.

3.



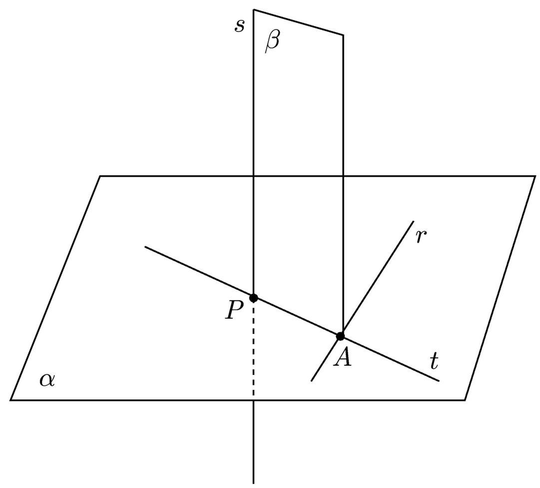
$r \cap \alpha = P$

Por um ponto P em um plano α sabemos que podemos traçar infinitas retas. r corta perpendicularmente α em P, então

r é concorrente a infinitas retas.

E como duas retas concorrentes definem um plano existem infinitos pontos contendo r.

4.

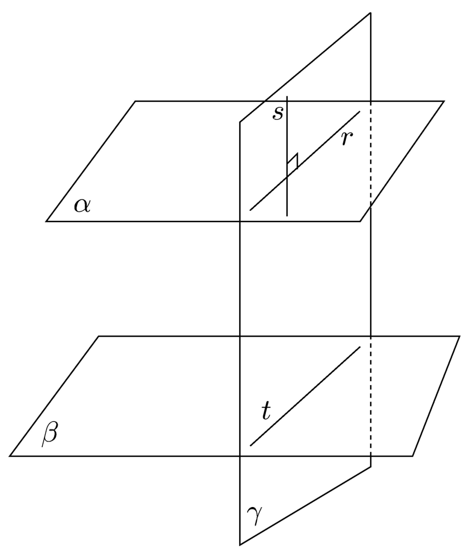


Se $\beta \cap s \neq \emptyset$, r e s são concorrentes logo determinam um único plano e r não é perpendicular ao plano.

Se $r \cap s = \emptyset$ então r e s são retas reversas, pois $r \nparallel s$.

Seja $P = s \cap \alpha$, trace uma reta t perpendicular a r passando por $P \Rightarrow r \cap t = A,\ t \perp s$, pois $s \perp \alpha$. O plano definido por s e t é $\perp$ a r, seja β. Como t é a única reta que passa por P e é $\perp$ a r o plano β é único.

5.



$\alpha \parallel \beta$

$\alpha \cap \gamma = r$ e $\alpha \perp \gamma$

Suponha que α <u>não</u> seja $\perp$ a β.

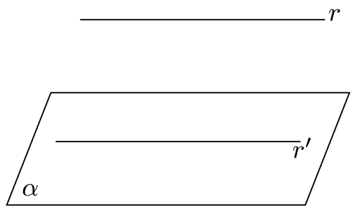
Como γ corta α, γ corta $\beta \Rightarrow \gamma \nparallel \beta$.

Daí, $\gamma \cap \beta = t$.

Existe $s \in \gamma$ tal que $s \perp r$, pois $s \subset \alpha \perp \gamma$. Mas $r \parallel t$, pois $\alpha \parallel \beta$, então $s \perp t$ (absurdo).

Logo, $\beta \perp \gamma$.

6.



$r \parallel \alpha$

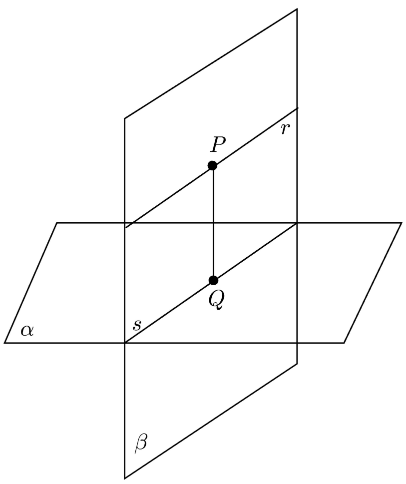
Seja $r' \subset \alpha$ tal que $r' \parallel r$.

r e r' determinam um plano β tal que todo plano perpendicular a r é perpendicular a β, por conseqüência, perpendicular a r'.

Se um plano é perpendicular a r', esse plano é perpendicular a α pois $r' \subset \alpha$.

Daí, todo plano perpendicular a r é perpendicular a α.

7.



$r \parallel \alpha$

Existe $s \subset \alpha$ tal que $r \parallel s$.

r e s definem um plano β onde $\beta \cap \alpha = s$.

Provar que se $\beta \perp \alpha$, β é único.

Seja $P \in r$, e seja Q o pé da perpendicular baixada de P a α, $\overline{PQ} \subset \beta$. Supondo que $\beta \perp \alpha \Rightarrow \overline{PQ} \perp \alpha$.

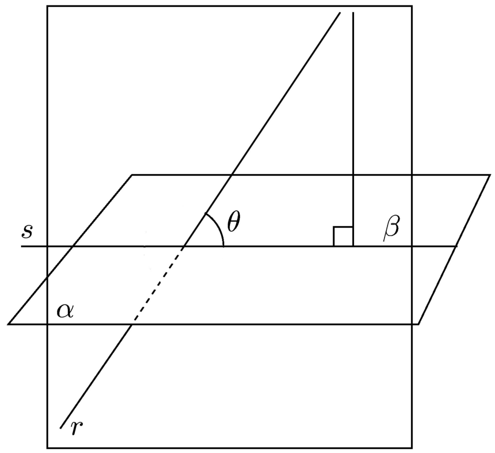
Vamos supor que existe $\gamma \neq \beta$ tal que $\gamma \perp \alpha$ e $r \subset \gamma$. Então existe $s' = \alpha \cap \gamma$ e $s' \parallel r \Rightarrow s' \parallel s$.

Como $\gamma \perp \alpha$ existe uma reta em γ que é perpendicular a α. Seja $\overline{PK} \subset \gamma$, onde K é o pé da perpendicular baixada de P a α em γ, e $K \in s'$.

Então $\overline{PK} \perp \alpha$, mas temos que $\overline{PQ} \perp \alpha$, absurdo pois se dois segmentos são perpendiculares a um plano, ou eles são paralelos, o que não é verdade, pois eles possuem pelo menos um ponto em comum (o ponto P), ou eles são coincidentes, o que não são pois $Q \in s$ e $K \in s'$.

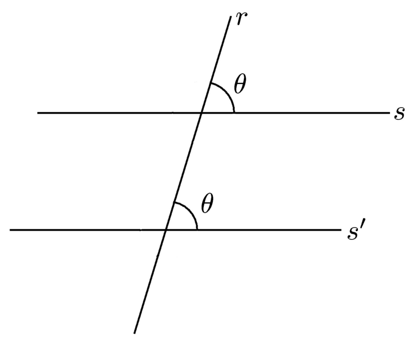
Daí, se tem que β é único.

8.



Definimos o ângulo entre r e α como sendo o ângulo entre r e $s \Rightarrow \theta$ onde $s = \alpha \cap \beta$ e β é o plano perpendicular a α que contém r ($\beta \perp \alpha$ e $r \in \beta$).

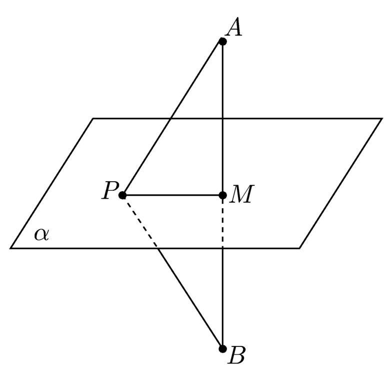
Seja γ um plano, tal que $\gamma \parallel \alpha \Rightarrow \beta \perp \gamma$ e $\exists s' \in \gamma$ tal que $s' \parallel s$.



O ângulo entre r e s é igual ao ângulo entre r e s' (ângulos correspondentes).

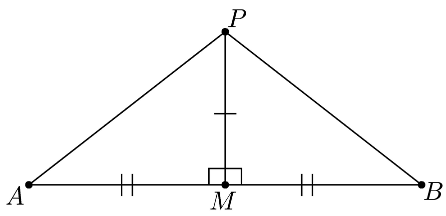
Como $r \in \beta$, $\beta \perp \gamma$ e $\beta \cap \gamma = s$ o ângulo entre r e γ é θ.

9.



Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$.

Seja α um plano $\perp$ a $\overline{AB}$ passando por M. A partir de um ponto P qualquer de α trace o segmento $\overline{PM}$; $\overline{PM}$ é $\perp$ $\overline{AB}$, então:



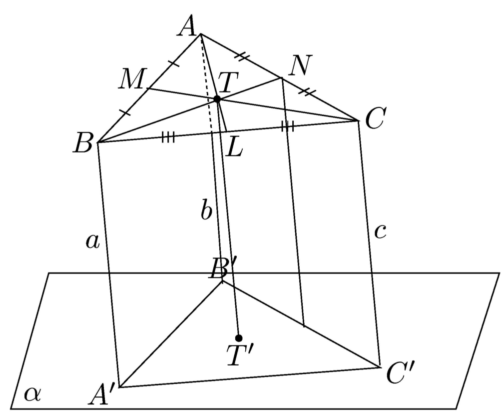
$$\triangle APM \cong \triangle BPM$$

$$\text{pois} \begin{cases} PM \ \text{comum} \\ \overline{AM} = \overline{MB} \\ A\widehat{M}P = B\widehat{M}P \end{cases}$$

Logo, $\overline{AP} = \overline{BP} \Rightarrow P$ é equidistante de A e B. Então como P é um ponto qualquer de α, todos os pontos de α são equidistantes de A e B.

$\Rightarrow$ O conj. dos pontos equidistantes de A e B é o plano α que é $\perp$ a $\overline{AB}$, e como M é equidistante de A e B, $M \in \alpha$.

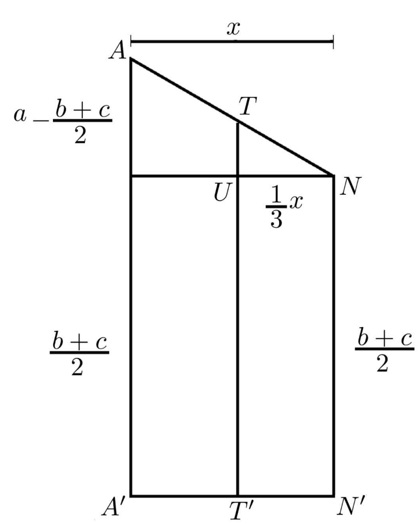
10.



Se $a = b = c$, trivial.

Supor $a > b$ e $a > c$. A distância de N a α é $\dfrac{b+c}{2}$.

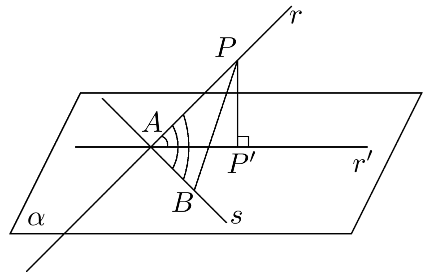
Considere



Por semelhança, temos que $m(TU) = \dfrac{1}{3}\left(a - \left(\dfrac{b+c}{2}\right)\right) = \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{6} - \dfrac{c}{6}$

e $m(T'T) = m(TU) + m(UT') = \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{6} - \dfrac{c}{6} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+b+c}{3}$.

11.



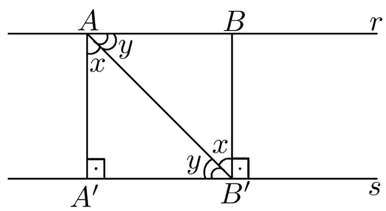
$r \cap \alpha = \{a\}$, $r' = \text{proj}_\alpha r$
$A \in s \;\; s \subset \alpha$

Seja $P' = \text{proj}_\alpha P$ e B um ponto de s tal que $\overline{AB} = \overline{AP'}$.

Notemos que $\overline{PP'} \leq \overline{PB}$, pois $\overline{PP'}$ é perpendicular a α.

Dos triângulos PAP' e PAB, vem: ($\overline{AP}$ comum, $\overline{AP'} \cong \overline{AB}$ e $\overline{PP'} \leq \overline{PB}$) $\Rightarrow P\widehat{A}P' \leq P\widehat{A}B \Rightarrow \widehat{rr'} \leq \widehat{rs}$.

12.

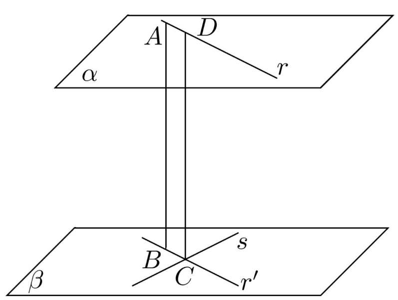


$r \parallel s$
$A \in r$ e $B \in r$
$A' \in s$ e $B' \in s$

$$\left.\begin{array}{l} A' \text{ é o ponto de } s \text{ mais perto de } A \Rightarrow \overline{AA'} \perp s \\ B' \text{ é o ponto de } s \text{ mais perto de } B \Rightarrow \overline{BB'} \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$$

Trace $\overline{AB'}$. Temos que $A'\widehat{A}B = A\widehat{B}B'$ e $A\widehat{B}B' = A\widehat{A'}B'$. Como sabemos que $A'\widehat{B'}B = 90^0 = x + y$ e que $A'\widehat{A}B = x + y$ então $A'\widehat{A}B = 90^0$ e $A\widehat{A}B' = 90^0$. Então temos que todos os ângulos do quadrilátero medem 90^0, assim o quadrilátero é um retângulo. Como os lados do retângulo são iguais 2 a 2, segue que $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Concluindo que retas paralelas são eqüidistantes.

13.



r e s são retas reversas
$\alpha \parallel \beta$ (planos paralelos) onde $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
$r' \parallel r$ e $r' \subset \beta$.
B é o pé da perpendicular baixada de A ao plano $\beta \Rightarrow \; B \in s$.
$C = s \cap r'$

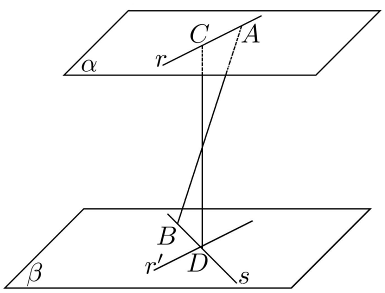
Trace uma reta paralela a $\overline{AB}$ passando por C, tem-se que $\overline{CD}$ é perpendicular a α e a β ($D \in r$).

$\rightarrow$ Provar que $\overline{CD}$ é único.

Supor que existe outro segmento perpendicular a r e a s com os extremos em r e s. Supor $\overline{EF}$, onde $E \in r$ e $F \in s \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{CD}$.

Se $E \in r$, a perpendicular baixada de E ao plano β é $F \Rightarrow F \in r'$, mas como $F \subset s$ e $F = r' \cap s$, logo $F = C$, o que nos dá um absurdo pois $\overline{EF} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{FD}$. Daí temos que $\overline{CD}$ é único.

14.



r e s reversas

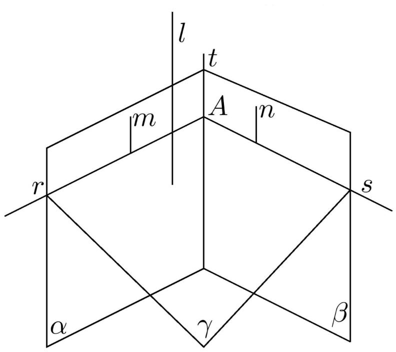
$r \in \alpha$ e $s \in \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

$\overline{CD} \perp \alpha$ e $\overline{CD} \perp \beta$

$m(\overline{CD})$ é a menor distância de α a β.

Então qualquer outro segmento que una α a β é menor ou igual a $m(\overline{CD})$, só será igual se o segmento se o segmento for perpendicular a α e a β. Daí se conclui que qualquer segmento que une $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ é maior que $m(\overline{CD})$, pois $\overline{CD}$ é o único segmento de $r \in s$ que é $\perp$ a α e a β.

15.



$\alpha \cap \beta = t$

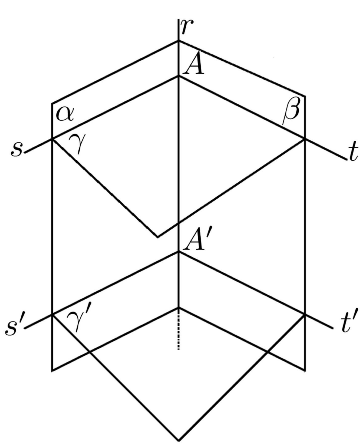
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \gamma = r \\ \beta \cap \gamma = s \end{array}\right\} \gamma \perp \alpha \ \text{ e } \ \gamma \perp \beta$$

Seja $m \in \alpha$ e $n \in \beta$; $m \perp r$ e $n \perp s$; $m \parallel n$

$\exists l \parallel m$ e $l \parallel n$ tal que $l \parallel \alpha$ e $l \parallel \beta \Rightarrow l \parallel t \Rightarrow t \parallel m$ e $t \parallel n$.

Então $t \perp \gamma$.

16.



$\gamma \perp r$ e $\gamma' \perp r \Rightarrow \gamma \parallel \gamma'$.

Todas as retas pertencentes a γ e γ' são paralelas ou são reversas.

$$\left.\begin{array}{l} s \cap r = A \\ s' \cap r = A' \end{array}\right\} \Rightarrow s \parallel s'$$

$$\left.\begin{array}{l} t \cap r = A \\ t' \cap r = A' \end{array}\right\} \Rightarrow t \parallel t'$$

17. (d)