Aula 19 – Paralelismo entre planos

Objetivo

- Identificar paralelismo entre planos.

Introdução

Na aula anterior vimos os conceitos de paralelismo entre retas e paralelismo entre reta e plano no espaço. Nesta aula veremos o conceito de paralelismo entre planos.

Definição 1
Dois planos são chamados paralelos se eles não se intersectam.

Em geral, o forro do teto e o piso de um quarto dão uma boa idéia do paralelismo entre planos (mas não em algumas casas que têm o forro "inclinado"). Duas paredes opostas de um quarto também costumam dar uma idéia de planos paralelos (a não ser quando são "tortas" ou "convergentes" como alguns chamam). Podemos imaginar o prolongamento dessas paredes infinitamente, em todas as direções, para nos convencer de que elas não devem se encontrar em nenhum ponto.

A seguinte proposição fornece um critério para o paralelismo entre planos:

Proposição 1
Se um plano é paralelo a duas retas concorrentes de outro plano, então esses planos são paralelos.

Prova:

Suponha que o plano α seja paralelo às retas concorrentes r e s contidas no plano β. Queremos provar que α e β são paralelos. Vamos provar isso por contradição.

Suponha que α e β não sejam paralelos. Como α e β são distintos (por quê?), a interseção entre α e β é uma reta, que chamaremos t (veja a **Figura 19.1**). Como r e s são paralelas a α, e $t \subset \alpha$, temos que $r \cap t = \emptyset$ e $s \cap t = \emptyset$. Como r, s e t estão em β, segue que r e s são paralelas a t.

Como r e s têm um ponto em comum (pois são concorrentes), há duas retas paralelas a t passando por um mesmo ponto, o que é um absurdo. Portanto α e β são paralelos.

Q.E.D.

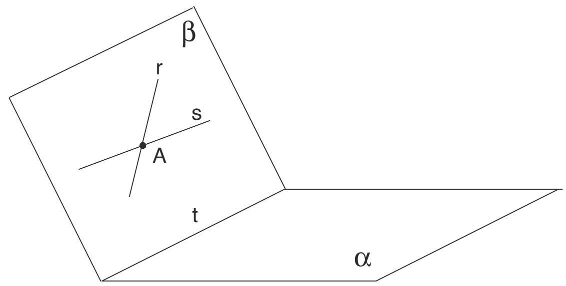

Figura 19.1: Prova da proposição 7.

Observe que a proposição que acabamos de provar não seria verdadeira sem a palavra “concorrentes” em seu enunciado. Um plano pode ser paralelo a duas retas não concorrentes de outro plano e não ser paralelo a esse plano. Veja um exemplo na **Figura 19.2**.

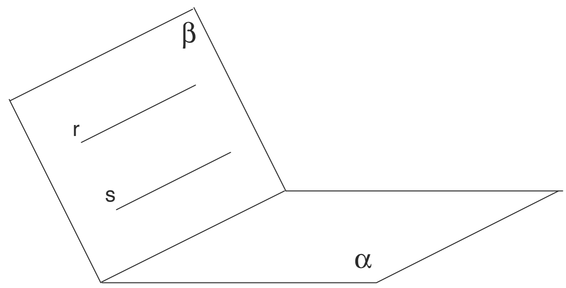

Figura 19.2: r e s paralelas a α.

Usaremos o símbolo // para indicar o paralelismo entre retas, entre reta e plano e entre planos no espaço. Por exemplo, para indicar que as retas r e s são paralelas, a reta r é paralela ao plano α e os planos α e β são paralelos, escreveremos simplesmente $r//s$, $r//\alpha$ e $\alpha//\beta$.

O quinto postulado de Euclides afirma que, por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada. Vamos ver agora uma versão para planos desse enunciado, que é o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 2

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

Prova:

Primeiro vamos mostrar que existe um tal plano, e depois mostraremos que é o único.

Considere um plano α e um ponto P fora dele. Tome duas retas concorrentes r e s em α. Já sabemos que existe uma única reta r' paralela a r passando por P e uma única reta s' paralela a s passando por P. As retas r' e s' são concorrentes no ponto P. Seja β o plano que contém r' e s' (veja a **Figura 19.3**).

A proposição 8 pode ser vista como uma "versão para planos" do quinto postulado de Euclides, porém não é necessário colocá-la como axioma, pois ela pode ser provada usando os resultados anteriores.

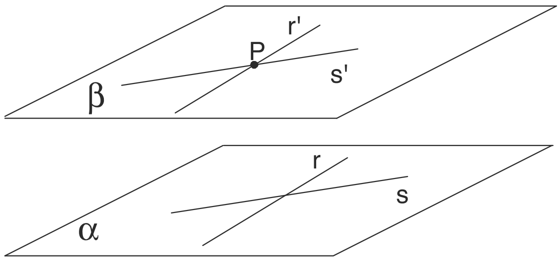

Figura 19.3: Prova da proposição 8.

A reta r' é paralela a $r \subset \alpha$, logo $r'//\alpha$. Do mesmo modo, $s'//\alpha$. Pela última proposição que provamos, podemos concluir que $\alpha//\beta$.

Resta agora provar que não existem outros planos paralelos a α passando por P. Vamos fazer a prova disso por contradição. Suponhamos que exista outro plano β' paralelo a α, passando por P. Como β e β' são distintos e têm o ponto P em comum, a interseção entre os dois é uma reta, que chamaremos de t.

Considere no plano α uma reta c que não seja paralela a t, e seja γ o único plano contendo c e P, como na **Figura 19.4**.

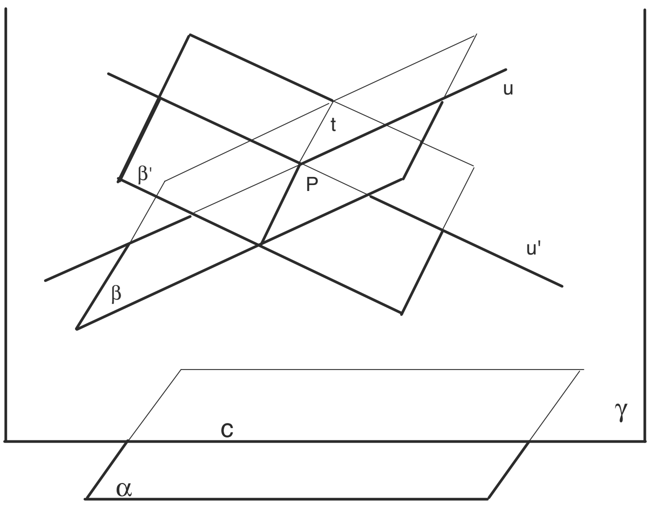

Figura 19.4: Prova da unicidade do plano paralelo.

Sejam $u = \gamma \cap \beta$ e $u' = \gamma \cap \beta'$. Temos que as retas u e u' não intersectam o plano α, pois estão contidas em planos paralelos a α. Logo u e u' também não intersectam c, porque $c \subset \alpha$. Como u e c estão no plano γ e não se intersectam, temos $u//c$. Do mesmo modo, $u'//c$, e, como u e u' passam por P, temos duas retas distintas paralelas a c passando pelo ponto P, o que é um absurdo. Então não podem existir dois planos paralelos a α passando por P.

Q.E.D.

Como conseqüência da proposição anterior, vamos provar o fato intuitivo de que, se uma reta corta um de dois planos paralelos, então também corta o outro. De fato, suponhamos que α e β são dois planos paralelos, e a reta r corta α no ponto A. Vamos escolher uma outra reta, s, em α, passando por A. Seja γ o plano que contém r e s, como na **Figura 19.5**.

Se uma reta corta uma de duas retas paralelas no espaço, podemos afirmar que também corta a outra?

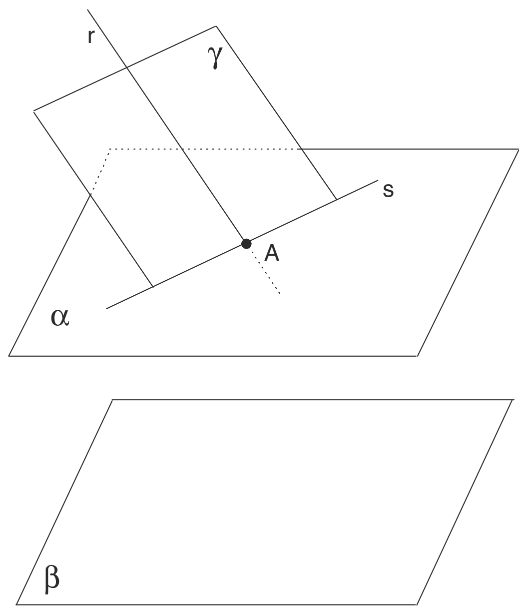

Figura 19.5: $\alpha//\beta$, r corta α.

A reta s é paralela a β, pois está em α. Se a reta r não cortasse β, seria paralela a β, e o plano γ, que contém r e s, pela primeira proposição desta aula, seria também paralelo a β. Teríamos então dois planos, α e γ, paralelos a β, passando pelo ponto A. Isso não é possível. Logo r corta β. Acabamos de provar a seguinte proposição:

Proposição 3

Se uma reta corta um de dois planos paralelos, então também corta o outro.

A proposição a seguir também é conseqüência dos resultados anteriores, e sua prova será deixada como exercício.

Proposição 4

Se um plano corta uma de duas retas paralelas, então também corta a outra.

Nosso objetivo agora é mostrar que duas retas reversas estão contidas em planos paralelos.

Proposição 5

Se r e s são retas reversas, existem planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

Prova:

Sejam r e s retas reversas e escolha quaisquer pontos $A \in r$ e $B \in s$. Seja r' a reta que passa por A e é paralela a s, e seja s' a reta que passa por B e é paralela a r. Chame de α o plano contendo r e r', e de β o plano contendo s e s' (**Figura 19.6**).

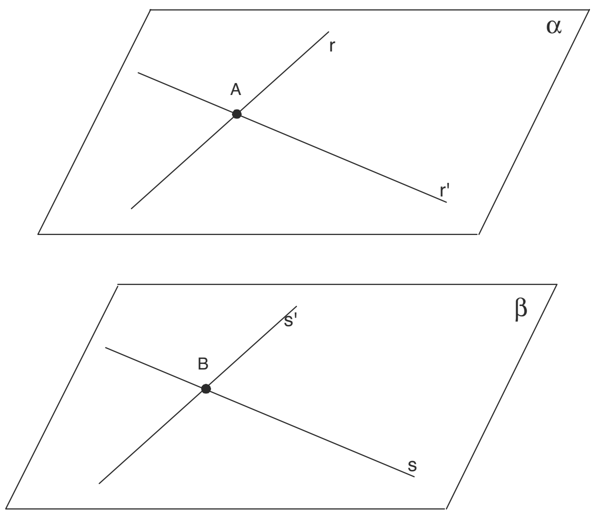

Figura 19.6: Planos contendo as retas reversas r e s.

Como r é paralela à reta s' do plano β e r não está contida em β, pois r e s são reversas, tem-se $r//\beta$. Em particular, tem-se que $A \notin \beta$ e que r' não está contida em β. Como r' é paralela à reta s do plano β, tem-se $r'//\beta$. Assim, β é paralelo às retas concorrentes r e r', contidas em α, de onde se conclui que α e β são paralelos.

Q.E.D.

Considere agora dois planos paralelos α e β, e uma reta r que os corta. Tome dois pontos quaisquer A e B em α, e trace por eles retas paralelas a r. Chame de A' e B' os pontos em que essas retas cortam β, e trace os segmentos AB e $A'B'$, como na **Figura 19.7**.

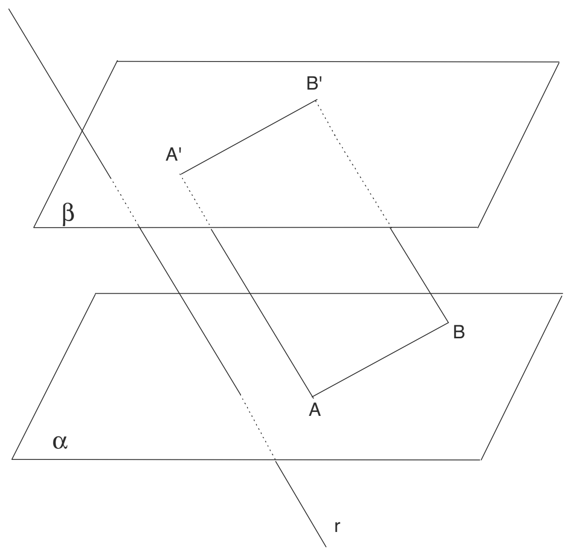

Figura 19.7: Planos paralelos cortados por uma reta.

Como $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são paralelos por construção, o quadrilátero $ABB'A'$ é plano. Como $\alpha \cap \beta = \emptyset$, tem-se que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são paralelas (estão contidas no plano do quadrilátero e não se intersectam). Temos então que os lados opostos do quadrilátero $ABB'A'$ são paralelos, ou seja, $ABB'A'$ é um paralelogramo. Em conseqüência disso, seus lados opostos são congruentes, o que nos dá $AA' \equiv BB'$. Está provada então a seguinte proposição:

Proposição 6

Os segmentos de retas paralelas localizados entre planos paralelos são congruentes.

Note que provamos também que $A'B' \equiv AB$, ou seja, a distância entre dois pontos de α é igual à distância entre os pontos correspondentes em β. Essa propriedade é muito importante e pode ser utilizada para mostrar que uma figura contida em α é congruente à figura correspondente de β. Em termos mais precisos, temos as seguintes proposições:

Proposição 7

Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja $P = A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo contido em α, e sejam $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ os pontos em que as retas paralelas a r passando, respectivamente, pelos pontos A_1, A_2, ..., A_n cortam β. Então $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ é congruente a $P = A_1A_2\dots A_n$.

A **Figura 19.8** ilustra um caso em que P é um pentágono.

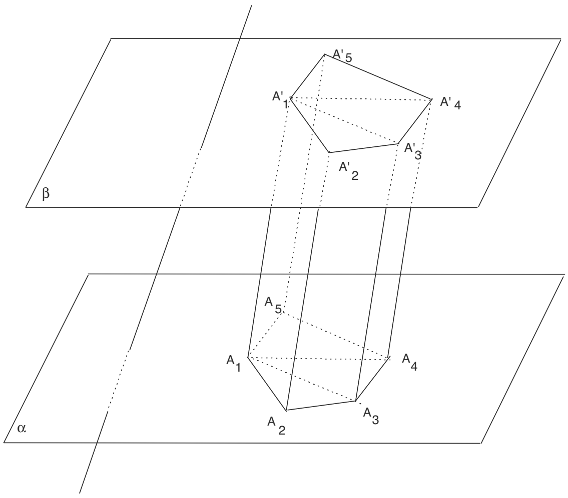

Figura 19.8: Prova da proposição 21.

Prova:

Para facilitar o entendimento, faremos a prova para o caso particular em que P é um pentágono (ilustrado na **Figura 19.8**). O caso geral é análogo. Trace as diagonais A_1A_3, A_1A_4, $A'_1A'_3$ e $A'_1A'_4$, dividindo cada pentágono em triângulos. Como a distância entre dois pontos de α é igual à distância entre os pontos correspondentes em β, temos que $A_1A_2 \equiv A'_1A'_2$, $A_2A_3 \equiv A'_2A'_3$ e $A_1A_3 \equiv A'_1A'_3$. Segue que os triângulos $A_1A_2A_3$ e $A'_1A'_2A'_3$ são congruentes (caso L.L.L.). Da mesma forma, prova-se que $A_1A_3A_4 \equiv A'_1A'_3A'_4$ e $A_1A_4A_5 \equiv A'_1A'_4A'_5$. Conseqüentemente, os lados e ângulos internos de P são congruentes aos lados e ângulos internos correspondentes de P'. Logo, P e P' são congruentes.

Q.E.D.

Deixaremos como exercício a prova da seguinte proposição:

Proposição 8

Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja Γ um círculo contido em α. Por cada ponto $A \in \Gamma$ passe uma reta paralela a r, e seja A' o ponto em que essa reta corta β. Chamemos de Γ' o conjunto de todos os pontos determinados dessa forma. Tem-se que Γ' é um círculo de mesmo raio que Γ (veja a **Figura 19.9**).

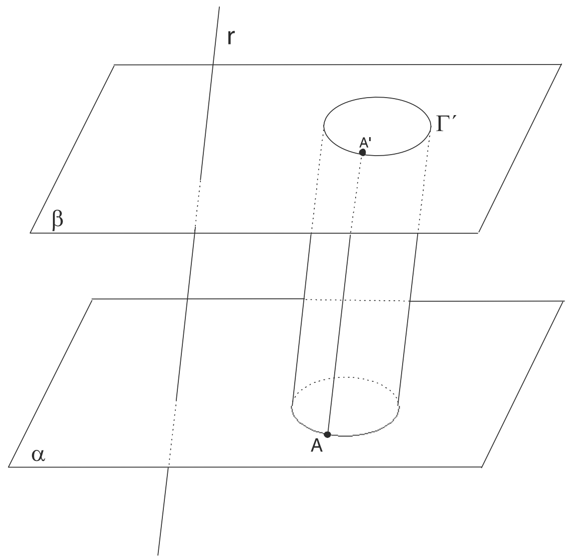

Figura 19.9: Γ' é a figura de β correspondente a Γ.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Critérios para identificar se dois planos são paralelos.
- Resultados envolvendo paralelismo entre planos.

Exercícios

1. Prove que se dois planos são paralelos então todo plano que corta um deles corta também o outro.
2. Sejam α e β planos paralelos e r uma reta paralela a α. Prove que $r \subset \beta$ ou $r//\beta$.
3. **(Transitividade do paralelismo de planos)** Prove que se dois planos distintos são paralelos a um terceiro então eles são paralelos entre si.

4. Seja r uma reta que corta um plano α e seja P um ponto que não pertence a α nem a r. Quantas retas paralelas ao plano α passam por P e intersectam r? Justifique sua resposta.

5. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

   - Se dois planos são paralelos, existe uma reta de um deles que é paralela a qualquer reta do outro.
   - Se dois planos são paralelos, existe uma reta de um deles que não é paralela a nenhuma reta do outro.
   - Se r e s são reversas e P é um ponto que não pertence a r nem a s, então existe um único plano que passa por P e é paralelo a r e a s.
   - Se uma reta é paralela a dois planos distintos, então esses planos são paralelos.
   - Se duas retas de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas concorrentes de outro plano, então esses planos são paralelos.

6. Sejam α_1, α_2 e α_3 três planos paralelos e r e s retas que os cortam. Chame de R_1, R_2 e R_3 os pontos em que r corta α_1, α_2 e α_3, respectivamente, e de S_1, S_2 e S_3 os pontos em que s corta α_1, α_2 e α_3, respectivamente. Prove que

$$\frac{m(R_1R_2)}{m(S_1S_2)} = \frac{m(R_1R_3)}{m(S_1S_3)} = \frac{m(R_2R_3)}{m(S_2S_3)}$$

7. Sejam r e s retas reversas. Prove que o conjunto dos pontos médios de todos os segmentos que têm um extremo em r e o outro em s é um plano.

8. Prove a proposição 4: " Se um plano corta uma de duas retas paralelas então corta também a outra."

9. Prove a proposição 8: "Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja Γ um círculo contido em α. Por cada ponto $A \in \Gamma$ passe uma reta paralela a r, e seja A' o ponto em que essa reta corta β. Chamemos de Γ' o conjunto de todos os pontos determinados dessa forma. Tem-se que Γ' é um círculo de mesmo raio que Γ."