AVALIAÇÃO À DISTÂNCIA 2 - solução

Questão 1 (2 pts) Na Aula 24 do módulo está definido "prisma inscrito em um cilindro". Diz-se que um prisma está inscrito em um cilindro quando suas arestas laterais são geratrizes do cilindro e os planos de suas bases coincidem com os planos das bases do cilindro. Uma pergunta que surge, é: "Todo prisma é inscritível em algum cilindro?". Deixe-me reformular a pergunta porque não definimos a expressão "prisma inscritível em um cilindro". Dado um prisma qualquer, sempre existe um cilindro no qual esse prisma está inscrito? Caso a sua resposta sem "sim", apresente uma demonstração. Caso a sua resposta seja "não", apresente um contraexemplo para a afirmação.

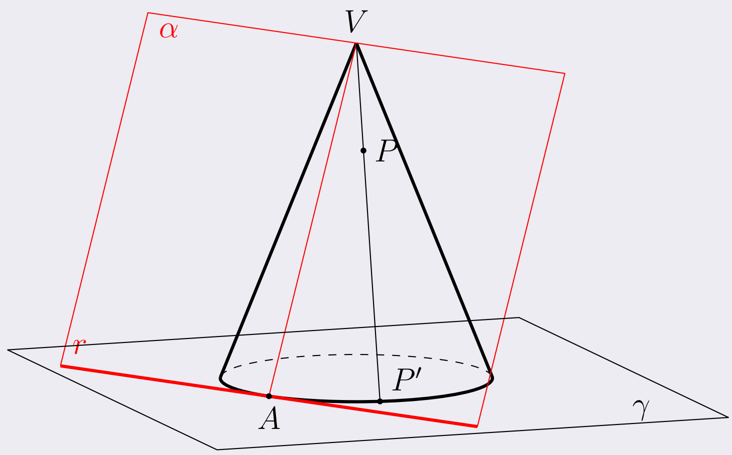
Solução:

Repare que sempre que um prisma é inscritível em um cilindro, o polígono de suas bases é inscritível em uma circunferência. Portanto, se o polígono da base do prisma não é inscritível em uma circunferência, então tão pouco pode ser inscritível em um cilindro o prisma.
Um contraexemplo é qualquer prisma cuja base é um paralelogramo não retângulo.

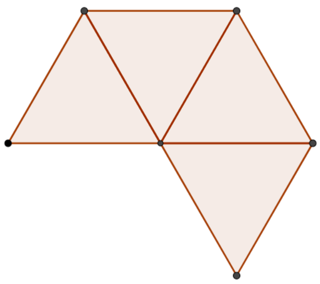
Questão 2 (2 pts) Considere um cone circular de vértice V e base Γ. Seja A um ponto de Γ e r uma reta tangente a Γ por A. Chame de α o plano determinado pelas retas concorrentes VA e r. Prove que a interseção de α com o cone é exatamente a geratriz VA, ou seja, que o plano α é tangente ao cone.

Solução:

Este exercício está no EP da Aula 24.
Já sabemos que VA está contido na interseção de α com o cone. Falta mostrar que a interseção de α com o cone está contida em VA.
Seja P um ponto da interseção de α com o cone. Vamos mostrar que $P \in VA$. De fato, a reta VP está contida em α pois tanto P como V pertencem a α. Seja P' a interseção de VP com γ, o plano que contém a base do cone. Como a interseção de α e γ é a reta r, o ponto $P \in VA$, de outro modo, $P' \notin r$.

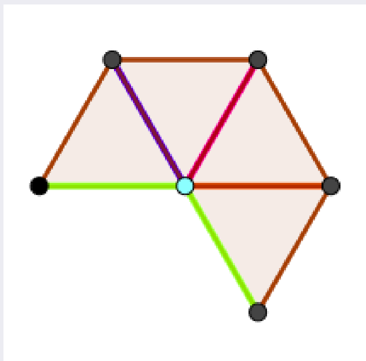


Questão 3 (2pts) A figura a seguir pode ser a planificação de uma pirâmide? Apresente o seu raciocínio.

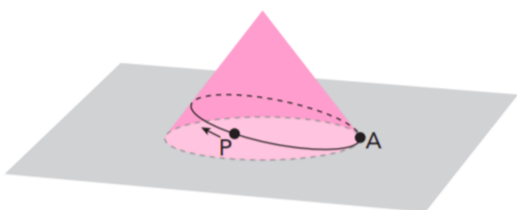


Solução:

Como todas quatro faces são triângulos, só poderia ser a planificação de um tetraedro. Contudo, em cada vértice de um tetraedro incidem exatamente três arestas. Mas no vértice destacado na figura, incidem 5 arestas, duas das quais serão identificadas, formando 4 arestas do eventual sólido. Uma contradição.



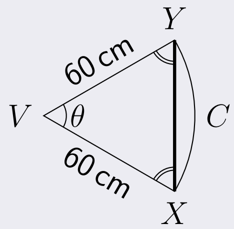
Questão 4 (2pts) **Questão adaptada de UERJ 2021:**A figura a seguir representa a trajetória do ponto P sobre a superfície lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede 10 cm e a geratriz, 60 cm. O ponto P inicia sua trajetória no ponto A, que pertence à circunferência da base, e dá uma volta completa em torno do cone, até retornar ao ponto A percorrendo a distância mínima (de menor comprimento) sobre a superfície lateral do cone.



Qual é o comprimento da trajetória percorrida pelo ponto P, em centímetros? Não se esqueça de apresentar o seu raciocínio.

Solução:

Considere a planificação a partir da geratriz do cone que liga o ponto A ao vértice do cone. De modo que na planificação a seguir, V é o vértice do cone e os pontos X e Y são identificados para formar o ponto A do cone.



O comprimento da menor trajetória de X a Y é o segmento de reta XY. O ângulo $\theta = \widehat{XVY}$ fica determinado pelo conhecimento do comprimento do arco XY no setor circular da planificação. Temos

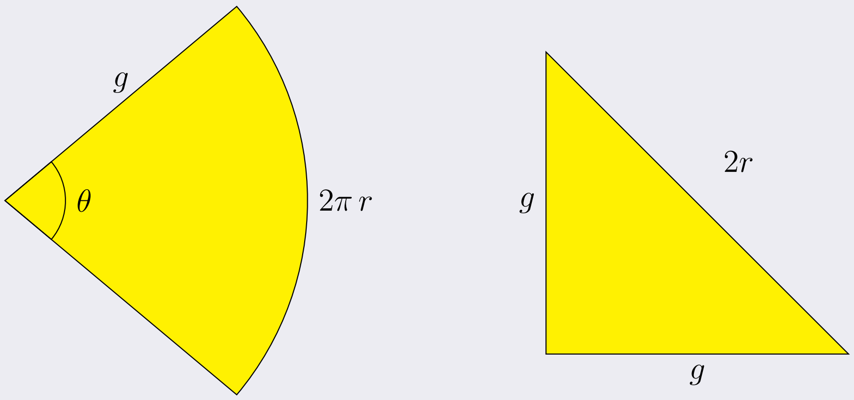
$$C = \left(\frac{\theta}{360^\circ}\right) 2\pi \cdot 60,$$

já que o comprimento de arco C está para o comprimento da circunferência completa assim como θ está para 360°. Por sua vez, o comprimento do arco coincide com o comprimento da circunferência da base do cone. Isto é, $C = 2\pi \cdot 10 = 20\pi cm$. De onde decorre que $\theta = 60^\circ$, logo o triângulo VXY é equilátero. Portanto, $XY = 60cm$.

Questão 5 (2pts) As geratrizes de um cone circular reto formam com o eixo do cone um ângulo de 45°. Sabendo-se que o perímetro de sua seção meridiana vale 2cm, quanto mede a área lateral desse cone? Racionalize ao máximo a solução. Evite usar fórmulas. Faça uma solução bonita!

Solução:

A área total (A_T) do cone é a soma da área lateral (A_L) com a área da base (A_C) do cone.



Chamando de g e r os comprimentos da geratriz e do raio do cone, respectivamente, chamando de θ o ângulo do setor circular que origina o cone. Sabemos que a área do setor é proporcional à área do círculo que o contém com constante de proporcionalidade $\theta/2\pi$, logo

$$A_L = \frac{\theta}{2\pi}\pi \cdot g^2 = \frac{\theta g^2}{2}.$$

Também $A_C = \pi r^2$. Precisamos dos valores de θ, g e r para resolver o problema.
O comprimento de arco (C_L) do setor circular também é proporcional ao comprimento de arco da circunferência com constante de proporcionalidade $(\theta/2\pi)$. Então

$$C_L = \frac{\theta}{2\pi} 2\pi g = \theta g.$$

Mas coincide com o comprimento da circunferência da base do cone, isto é, $C_L = 2\pi r$. Juntanto as duas informações obtemos $\theta g = 2\pi r$. Logo $\theta = 2\pi r/g$.

Substituindo o valor de θ em A_L obtém-se

$$A_L = \frac{\theta g^2}{2} = \pi r g.$$

Para calcular r e g, usamos o fato de que a seção meridiana do cone é um triângulo retângulo isósceles de lados g, g e $2r$ que tem perímetro igual a 2cm, o que nos fornece o sistema

$$\begin{cases} 2g + 2r = 2 & \text{perímetro} \\ g^2 + g^2 = (2r)^2 & \text{Teorema de Pitágoras} \end{cases}$$

De onde se obtém que $g = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ e $r = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Assim temos

$$A_L = \pi \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}.$$

A área da base é

$$A_C = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{(1+\sqrt{2})^2}.$$

Finalmente, a área total é

$$A_T = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{\pi}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}+1} = \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)}\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)} = \pi(\sqrt{2}-1).$$