Solução da AD1 de Geometria 3 - 2026.1

As suas figuras precisam ser claras e possuir legendas. Use as técnicas ensinadas no Guia básico de desenho para professores de Geometria Espacial.

Questão 1. (2pts) Desenhe e descreva um sólido tridimensional que tenha as vistas à seguir:

A vista superior é um círculo

A vista frontal é um retângulo

A vista lateral é um triângulo.

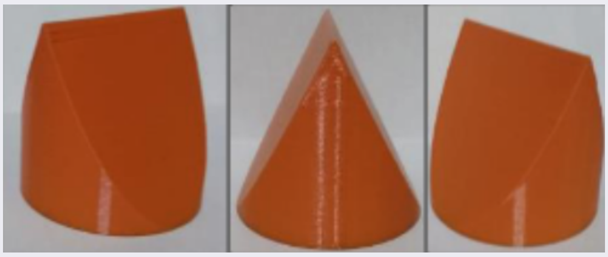
Esse sólido é o único com as propriedades acima?

( ) sim, então explique por quê?

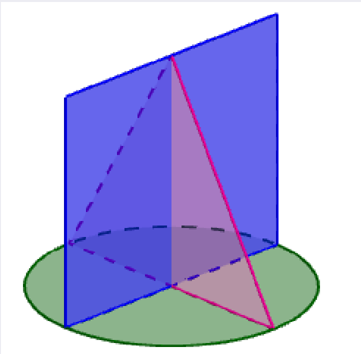
( ) não, então apresente mais um exemplo essencialmente diferente.

Solução:

O sólido da figura pode ser obtido a partir de seções de um cilindro circular reto. Basta seccioná-lo por dois planos que contêm um mesmo diâmetro da base superior e são tangentes a circunferência da base inferior em pontos diâmetralmente opostos. Considere apenas a parte do cilindro que está no mesmo semiespaço inferior dos dois planos.

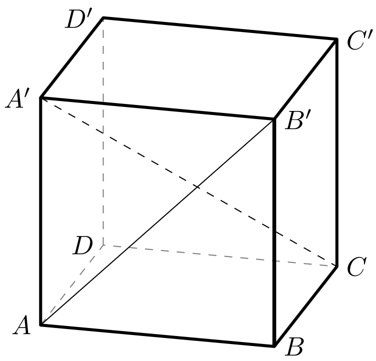


O sólido não é o único que tem essas projeções. Diversas alterações podem ser feitas nesse mesmo sólido preservando as vistas como descritas. No limite, pode-se obter um sólido 3D como o da imagem a seguir (também pode ser manipulado neste link). Ele é obtido por uma união adequada de um círculo, um retângulo e um triângulo.



Questão 2. (2pts) Dado um cubo $ABCD - A'B'C'D'$, calcule o ângulo entre as retas $A'C$ e AB'.

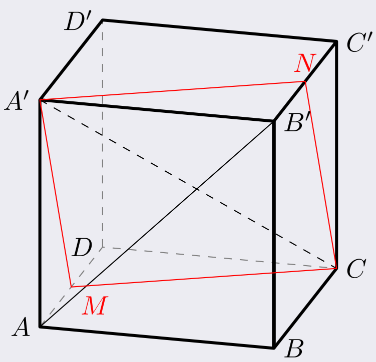
Sugestão: Use o aplicativo deste link para ajudar na visualização. Mas lembre-se que no final você precisa apresentar uma demonstração matemática, não vale responder que o ângulo é TAL porque o GeoGebra disse que é, você tem que explicar por que é.



Solução:

Por definição, o ângulo entre duas retas reversas é o ângulo que uma delas faz com uma paralela a outra que a intersecte.
Para definir uma tal paralela, seja O o ponto médio de $A'C$ (o centro do cubo) e seja r a reta paralela a AB' por O. Observe que a reta r intersecta os segmentos AD e $B'C'$ em seus pontos médios, digamos M e N, respectivamente (veja a figura). De fato, AB' e MN são paralelas e MN passa pelo centro O do cubo, logo a reta MN é a reta r. São paralelas porque $AB'NM$ é um paralelogramo (possui os lados opostos iguais, por exemplo).
Portanto, o ângulo de AB' e $A'C$ é o ângulo entre MN e $A'C$. Repare que o quadrilátero $A'MCN$ é um losango plano pois $A'M = MC = CN = NA'$. Mostremos essas duas coisas:

- $A'M = MC = CN = NA'$. Porque os triângulos retângulos $A'AM$, CDM, $CC'N$ e $A'B'N$ são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado pois os catetos são respectivamente lado e meio lado do cubo.

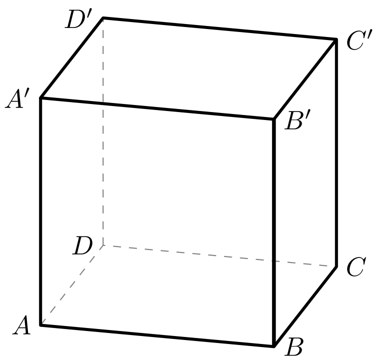


- Como as retas MN e $A'C$ são concorrentes, elas determinam um plano (Proposição 1 da Aula 18). Assim, o quadrilátero $A'MCN$ é plano. Como vimos que os lados são congruentes, ele é um losango.

Finalmente, o ângulo entre duas diagonais de um losango mede 90°. Portanto, $A'C$ e MN são perpendiculares. O ângulo entre AB' e $A'C$ é 90°.

Questão 3. Nesta questão definimos um cubo e solicitamos que você justifique algumas propriedades dessa figura, então você não pode usar outros resultados além dos vistos em Geometria Plana e em Geometria Espacial até este ponto da matéria.

O cubo $ABCD - A'B'C'D'$ é a união dos seis quadrados distintos $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ e $DAA'D'$ no espaço.



Use essas informações para mostrar:

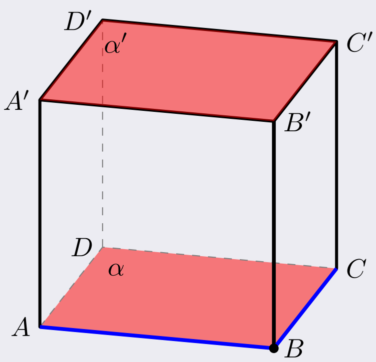
a) (1pt) O plano que contém o quadrado $ABCD$ é paralelo ao plano que contém o quadrado $A'B'C'D'$.

b) (1pt) As retas AB e $B'C'$ são reversas.

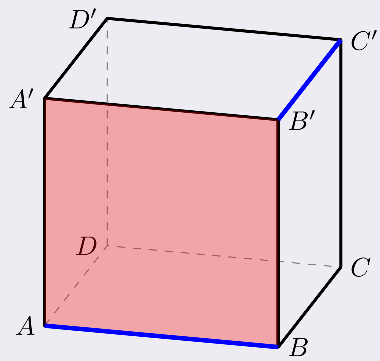
Capriche na redação e lembre-se de enunciar as proposições que usar.

Solução:

a) Para mostrar que dois planos são paralelos você pode usar a Proposição 1 da Aula 19, isto é, basta mostrar que um deles contém um par de retas concorrentes que são paralelas ao outro plano. Chame de α o plano que contém o quadrado $ABCD$ e de α' o plano que contém o quadrado $A'B'C'D'$. Afirmo que as retas concorrentes AB e BC de α são paralelas a α'. De fato, como $ABB'A'$ é um quadrado, as retas AB e $A'B'$ são paralelas. Como $BCC'B'$ é um quadrado, as retas BC e $B'C'$ são paralelas. É claro que o vértice B não pertence ao plano α' (veja o item b), assim as retas AB e BC não estão contidas nesse plano. Portanto, as retas concorrentes AB e BC são paralelas ao plano α' (Proposição 5 da Aula 18) pois não estão contidas e são paralelas a retas desse plano. Conclusão: os planos α e α' são paralelos.



b) Os pontos não colineares A, B e B' determinam um único plano (Axioma 1), a saber, o plano que contém o quadrado $ABB'A'$. O ponto C' não pertence a esse plano pois $B'C'$ é perpendicular a esse plano (análogo ao mostrado no item anterior). Assim as retas AB e $B'C'$ são reversas porque o único plano que contém os pontos A, B e B' não contém o ponto C', ou seja, nenhum plano contém os quatro pontos, em particular, nenhum plano contém as duas retas AB e $B'C'$.



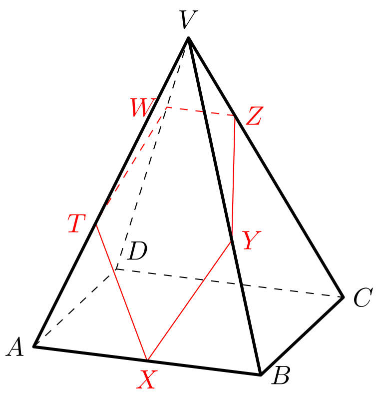
Questão 4. (2pts) Qual é o polígono com o maior número de lados que se pode obter na interseção de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada? Justifique. Se desejar, mova os pontos vermelhos no aplicativo .

Solução:

O maior polígono que se pode obter é um pentágono. Isso se deve ao fato de que a pirâmide tem 5 faces e que existe um plano que intersecta o interior de todas as cinco faces simultaneamente. A interseção do plano com a face origina um lado do polígono.

Questão 5. (2pts) Você colocou a questão anterior numa prova e um de seus estudantes resolveu a questão como a seguir. Apresente um feedback que ajude o estudante a entender o próprio erro. (Sugiro construir a interseção do estudante no aplicativo deste link e manipular a construção, aos poucos você vai aprendendo a usar o GeoGebra 3D).

Solução: A figura a seguir representa o pentágono $XYZWT$, que é a interseção da pirâmide com um plano. Como a pirâmide tem cinco faces, o polígono de maior gênero que se pode obter da sua interseção com um plano é um pentágono.



Solução:

Seja α o plano cuja interseção com a pirâmide determina o pentágono $XYZWT$ que você desenhou. Se entendi bem a sua figura, os pontos X, Y e T pertencem à face VAB. Como se tratam de pontos não colineares, afinal, são vértices consecutivos de um pentágono, eles determinam um plano único plano (Axioma 1). Portanto, $\alpha =$ plano (VAB). O que leva a uma contradição, porque os pontos Z e W também pertencem a α, mas não pertencem ao plano VAB.