UNIRIO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)
ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)
Curso: Matemática **Disciplina:** Geometria 3 **Professor:** Fabio Simas

Solução da Avaliação a Distância de Geometria 3 - 2024.1

Questão 1. Sejam dados no espaço um plano α e dois pontos A e B, que não pertencem a α e estão situados em semiespaços diferentes determinados por α (ou seja, cada ponto está de um lado do plano α).

Prove que:

a) (0,5pt) Faça uma figura para ilustrar a situação descrita.

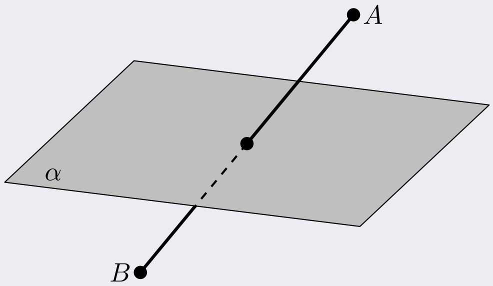
b) (1pt) Se a distância de A a α é igual à distância de B a α, então o ponto médio de AB pertence a α.

c) (1pt) Se o ponto médio de AB pertence a α, então a distância de A a α é igual à distância de B a α.

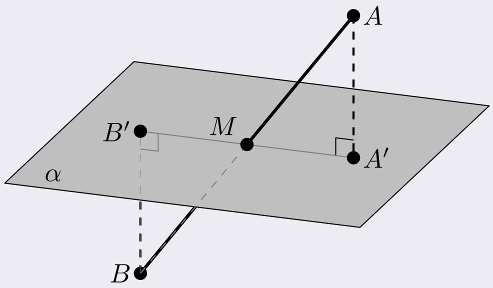
Lembre-se que a distância de um ponto a um plano é o comprimento do segmento perpendicular ao plano que tem extremidades do plano e no ponto.

Solução:

a)



b) Sejam A' e B' os pés das perpendiculares a α baixados de A e de B, respectivamente (dito de outra forma, A' e B' são as projeções ortogonais de A e B sobre o plano α). Seja também M o ponto em que o semento AB cruza o plano α.



Como se sabe AA' e BB' são, respectivamente, as distâncias de A a α e de B a α. Se $AA' = BB'$, então os triângulos $AA'M$ e $BB'M$ são congruentes por LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto) pois os ângulos $\widehat{BMB'}$ e $\widehat{AMA'}$ são opostos pelo vértice, logo são iguais. Portanto, $BM = MA$, ou seja, M é o ponto médio de AB.

• *Outra maneira de se chegar à mesma conclusão neste item é observar que os segmentos AA' e BB' são iguais e paralelos e lembrar que isso implica que o quadrilátero $AA'BB'$ é um paralelogramo. Outra característica dos paralelogramos é que suas diagonais se intersectam em seus pontos médios.*

Logo $AB \cap A'B' = \{M\}$ é ponto médio de AB.

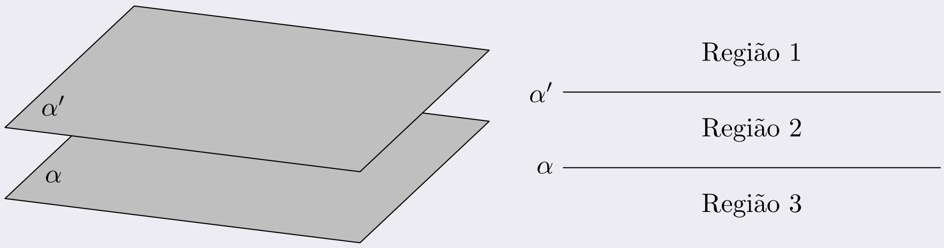
c) Aqui vamos usar a mesma linguagem do item anterior, exceto que vamos chamar de M o ponto médio do segmento AB e vamos supor que M pertence ao plano α. Como M é ponto médio de AB, temos $AM = BM$. Novamente, temos $\widehat{BMB'} = \widehat{AMA'}$ pois são ângulos opostos pelo vértice. Assim, os triângulos $AA'M$ e $BB'M$ são congruentes pelo caso ALA. Portanto, os lados AA' e BB' são iguais, isto é, as distâncias de A e B a α são iguais.

• *Novamente o problema poderia ser resolvido pelas mesmas afirmações equivalentes sobre paralelogramos.*

Questão 2. (2,5pts) Sejam α e α' planos paralelos, um ponto A que não pertence a α nem a α' e um triângulo XYZ contido em α. Se as retas AX, AY e AZ intersectam o plano α' em X', Y' e Z', respectivamente, mostre que os triângulos XYZ e $X'Y'Z'$ são semelhantes. Faça também uma figura para ilustrar a sua solução.

Solução:

Repare que os planos α e α' dividem o espaço em três regiões. O ponto A pertence a qualquer uma dessas três regiões. A imagem da direita indica uma vita frontal dos planos α e α' para destacar as três regiões mencionadas. As soluções nos três casos são muito similares. Neste gabarito, consideramos que o ponto A pertence à Região 1.

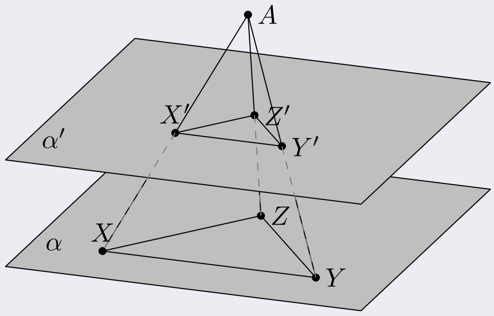


Considere o plano determinado pelos pontos A, X e Y. As retas XY e $X'Y'$ estão contidas nesse plano e não se intersectam pois uma está em α e a outra está em α', portanto, as retas XY e $X'Y'$ são paralelas. Então os triângulos AXY e $AX'Y'$ são semelhantes (veja a figura a seguir), de onde conclui-se que

$$\frac{AX'}{AX} = \frac{AY'}{AY} = \frac{X'Y'}{XY}.$$

Usando os mesmos argumentos nos planos AYZ e AXZ obtém-se as semelhanças de triângulos $AY'Z' \sim AYZ$ e $AX'Z' \sim AXZ$, que equivalem às igualdades:

$$\frac{AY'}{AY} = \frac{AZ'}{AZ} = \frac{Y'Z'}{YZ} \text{ e } \frac{AX'}{AX} = \frac{AZ'}{AZ} = \frac{X'Z'}{XZ}.$$

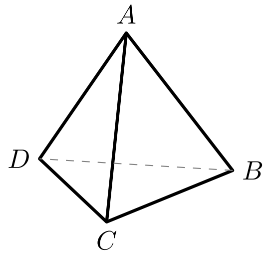


Das três sequências de igualdades, obtém-se diretamente que

$$\frac{X'Y'}{XY} = \frac{Y'Z'}{YZ} = \frac{X'Z'}{XZ}.$$

Isto é, os triângulos $X'Y'Z'$ e XYZ são semelhantes pelo caso lado, lado, lado de semelhança de triângulos.

Questão 3. A figura ilustra um tetraedro regular $ABCD$. Um tetraedro regular é uma figura tridimensional formada pela união de quatro triângulos equiláteros congruentes de modo que cada lado desses triângulos é lado de exatamente dois dos quatro triângulos, como indicado na figura para os triângulos ABC, ABD, ACD e BCD.



a) (0,7pt) Mostre que AB e CD são retas reversas.

b) (0,8pt) Mostre que AB e CD são retas perpendiculares.

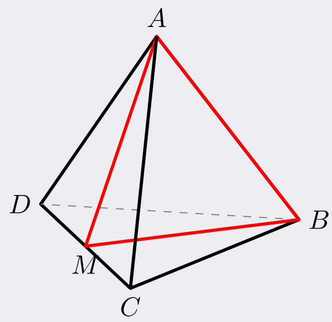
c) (0,8pt) Determine uma reta r que seja perpendicular às retas AB e CD.

d) (0,7pt) Existe reta diferente de r que seja perpendicular a AB e a CD? Explique.

Solução:

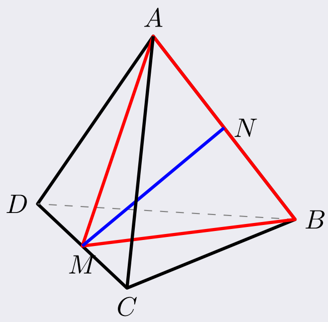
a) Se as retas AB e CD fossem coplanares, então os pontos A, B, C e D seriam coplanares e o tetraedro seria uma figura bidimensional e não tridimensional.

b) Seja M o ponto médio do segmento CD. Claro que M não pertence à reta AB, isto é, A, B e M são não colineares. Vamos mostrar que a reta CD é perpendicular ao plano ABM. De fato, os segmentos AM e BM são medianas dos triângulos equiláteros ACD e BCD, respectivamente, afinal, M é ponto médio de CD. Como os triângulos ACD e BCD são equiláteros, suas medianas também são alturas, portanto, as retas AM e BM são ambas perpendiculares a CD.



Finalmente, pela Proposição 2 da Aula 20, a reta CD é perpendicular ao plano ABM porque é perpendicular às retas concorrentes AM e BM desse plano. Como CD é perpendicular ao plano ABM, CD é perpendicular a todas as retas desse plano, em particular, CD é perpendicular à reta AB.

c) Como visto no item anterior, o plano ABM é perpendicular à reta CD, então todas as retas desse plano são perpendiculares a CD. Precisamos encontrar uma reta desse plano que seja perpendicular à reta AB. O triângulo ABM é isósceles de base AB, pois $AM = BM$ são alturas de triângulos equiláteros congruentes. Portanto, a altura de ABM relativa a AB está contida no plano ABM e é perpendicular a AB.
Conclusão: seja N o ponto médio de AB, a reta MN é perpendicular a AB pois é mediana (e, portanto, altura) relativa à base do triângulo isósceles ABM. Como MN está contida no plano ABM, que é perpendicular a CD, a reta MN é perpendicular a CD.



d) A reta MN é a única reta perpendicular a CD e a AB que intersecta essas duas retas. Mas pela definição de perpendicularismo dada no módulo, qualquer reta paralela a MN é perpendicular (sem intersectar ambas) a AB e CD.
Fato é que dadas duas retas reversas, existe uma única reta perpendicular às duas que intersecta ambas as retas. Se houvessem duas, elas seriam paralelas. Duas retas paralelas determinam um plano. Esse plano conteria dois pontos de cada uma das retas reversas, logo esse plano conteria as duas retas reversas, o que é uma contradição com o fato das retas serem reversas.

Questão 4. Esta atividade pretende justificar que o ângulo entre uma reta e um plano é o menor ângulo entre esta reta e uma reta do plano. Seja γ um plano, r uma reta secante a γ por um ponto A de γ. Considere uma reta s contida no plano γ que passe por A. Escolha um ponto $P \neq A$ em r e chame de P' sua projeção ortogonal sobre γ. Queremos mostrar que o ângulo entre r e AP' é menor que, ou igual a, o ângulo entre r e s. Para isso, considere $P'' \in s$ a projeção ortogonal de P sobre s. Denote por α o ângulo $\widehat{PAP'}$ e por β o ângulo $\widehat{PAP''}$.

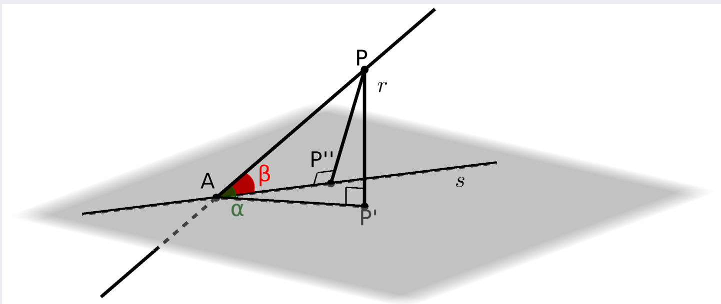
a) (1,25 pt) Faça uma figura que ilustre a situação em questão.

b) (1,25 pt) Mostre que $\alpha < \beta$.

c) Releia a atividade inteira e reflita se o que foi feito realmente prova o fato inicialmente proposto.

Solução:

a) A figura do enunciado é como a seguir:



b) Observe que o triângulo $PP'P''$ é retângulo em P' pois como a reta PP' é perpendicular ao plano, ela é perpendicular a todas as retas deste plano, em particular, PP' é perpendicular a $P'P''$. Como $PP'P''$ é um triângulo retângulo em P', o lado PP'' é a hipotenusa e, portanto, maior que o cateto PP'. Como os triângulos retângulos APP' e APP'' possuem a mesma hipotenusa AP e o cateto PP' de APP' é menor que o cateto PP'' de APP'', podemos concluir que $\sin\alpha < \sin\beta$. Como os ângulos α e β são positivos e menores do que $90°$ e a função seno é crescente no intervalo $[0, 90°]$, concluímos que $\alpha < \beta$.

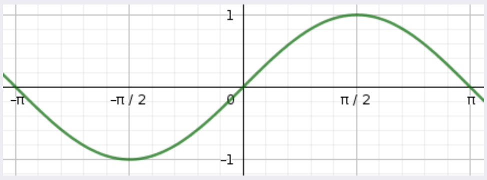


Gráfico da função seno.