Bacharelado em Sistemas de Informação
Disciplina: Linguagens Formais e Autômatos
2019.2 — Lista de exercícios 3 — GABARITO

Linguagens Livres de Contexto

Questão 1 ....

Determine as linguagens geradas por cada uma das gramáticas abaixo.

(a) $G = (\{I\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, I)$, com regras de produção:

$$I \to \mathtt{1}I\mathtt{0} \mid \varepsilon$$

$\{\mathtt{1}^n\mathtt{0}^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

(b) $G = (\{E, T, F\}, \{\mathtt{+}, \mathtt{x}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{1}\}, P, E)$, com regras de produção:

$$E \to E\mathtt{+}T \mid T$$
$$T \to T\mathtt{x}F \mid F$$
$$F \to \mathtt{(}E\mathtt{)} \mid \mathtt{1}$$

{expressões aritméticas bem-formadas com +, x, (,) e 1}

(c) $G = (\{M, N\}, \{\mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}, P, M)$, com regras de produção:

$$M \to NMNN \mid \mathtt{t}$$
$$N \to \mathtt{r} \mid \mathtt{s}$$

$\{w_1\mathtt{t}w_2 \colon w_1, w_2 \in \{\mathtt{r}, \mathtt{s}\}^*, |w_2| = 2|w_1|\}$

(d) $G = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, A)$, com regras de produção:

$$A \to BB$$
$$B \to BBB \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{a}$$

$\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \ : \ w$ **possui número par positivo de a's**$\}$

(e) $G = (\{S, T\}, \{\mathtt{+}, \mathtt{.}\}, P, S)$, com regras de produção:

$$S \to TT$$
$$T \to \mathtt{+}T\mathtt{+} \mid \mathtt{.}$$

$\{\mathtt{+}^x\mathtt{.}\mathtt{+}^y\mathtt{.}\mathtt{+}^z \colon x + z = y\}$

(f) $G = (\{R, S, T, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, R)$, com regras de produção:

$$R \to XRX \mid S$$
$$S \to \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a}$$
$$T \to XT \mid \varepsilon$$
$$X \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}$$

$\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \ : \ w$ **não é palíndromo**$\}$

Questão 2 ....

Para cada uma das linguagens abaixo, construa uma gramática livre de contexto que a gera satisfazendo as restrições dadas:

(a) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \ : \ w$ possui exatamente 5 1's$\}$, com no máximo 3 regras de produção

$G = (\{A, B\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, A)$**, com regras de produção:**

$$A \to B\mathtt{1}B\mathtt{1}B\mathtt{1}B\mathtt{1}B\mathtt{1}B$$
$$B \to \mathtt{0}B \mid \varepsilon$$

(b) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \;:\; w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$, com até 2 variáveis

$G = (\{A, B\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}, P, A)$, **com regras de produção:**

$$A \to \mathtt{a}B\mathtt{a} \mid \mathtt{b}B\mathtt{b} \mid \mathtt{c}B\mathtt{c} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c}$$
$$B \to \mathtt{a}B \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{c}B \mid \varepsilon$$

(c) $\{w \in \{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}^* \;:\; w$ tem comprimento ímpar e apenas o símbolo do meio é $\mathtt{z}\}$

$G = (\{M, S\}, \{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}, P, M)$, **com regras de produção:**

$$M \to SMS \mid \mathtt{z}$$
$$S \to \mathtt{x} \mid \mathtt{y}$$

(d) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \;:\; w$ é palíndromo$\}$

$G = (\{M\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}, P, M)$, **com regras de produção:**

$$M \to \mathtt{0}M\mathtt{0} \mid \mathtt{1}M\mathtt{1} \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \varepsilon$$

(e) $\overline{\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \;:\; w \text{ é palíndromo}\}}$

$G = (\{M, S, X\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}, P, M)$, **com regras de produção:**

$$M \to SMS \mid \mathtt{0}X\mathtt{1} \mid \mathtt{1}X\mathtt{0}$$
$$S \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1}$$
$$X \to SX \mid \varepsilon$$

(f) $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^l \;:\; i + j = k + l\}$

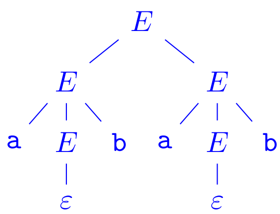
$G = (\{X, Y, Z, W\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}, P, X)$, **com regras de produção:**

$$X \to \mathtt{a}X\mathtt{d} \mid Y \mid Z \mid W$$
$$Y \to \mathtt{a}Y\mathtt{c} \mid W$$
$$Z \to \mathtt{b}Z\mathtt{d} \mid W$$
$$W \to \mathtt{b}W\mathtt{c} \mid \varepsilon$$

Questão 3 . . . .

Considere a gramática $G = (\{E\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \{E \to EE, E \to \mathtt{a}E\mathtt{b}, E \to \mathtt{b}E\mathtt{a}, E \to \varepsilon\}, E)$. Para cada uma das derivações a seguir, apresente a árvore de derivação associada, a derivação mais à esquerda e a derivação mais à direita equivalentes.

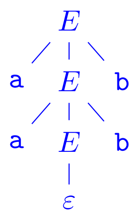
(a) $E \to EE \to \mathtt{a}E\mathtt{b}E \to \mathtt{a}E\mathtt{ba}E\mathtt{B} \to \mathtt{a}E\mathtt{bab} \to \mathtt{abab}$



Derivação mais à esquerda:
$E \to EE \to \mathtt{a}E\mathtt{b}E \to \mathtt{ab}E \to \mathtt{aba}E\mathtt{b} \to \mathtt{abab}$

Derivação mais à direita:
$E \to EE \to E\mathtt{a}E\mathtt{b} \to E\mathtt{ab} \to \mathtt{a}E\mathtt{bab} \to \mathtt{abab}$

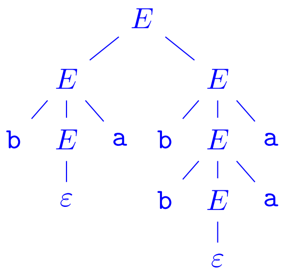
(b) $E \to \mathtt{a}E\mathtt{b} \to \mathtt{ab}E\mathtt{ab} \to \mathtt{abab}$



Derivação mais à esquerda:
$E \to \mathtt{a}E\mathtt{b} \to \mathtt{ab}E\mathtt{ab} \to \mathtt{abab}$

Derivação mais à direita:
$E \to \mathtt{a}E\mathtt{b} \to \mathtt{ab}E\mathtt{ab} \to \mathtt{abab}$

(c) $E \to EE \to \texttt{b}E\texttt{a}E \to \texttt{ba}E \to \texttt{bab}E\texttt{a} \to \texttt{babb}E\texttt{aa} \to \texttt{babbaa}$



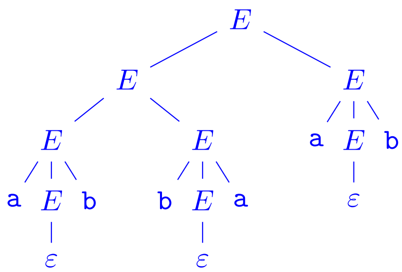
Derivação mais à esquerda:
$E \to EE \to \texttt{b}E\texttt{a}E \to \texttt{ba}E \to \texttt{bab}E\texttt{a} \to \texttt{babb}E\texttt{aa} \to \texttt{babbaa}$

Derivação mais à direita:
$E \to EE \to E\texttt{b}E\texttt{a} \to E\texttt{bb}E\texttt{aa} \to E\texttt{bbaa} \to \texttt{b}E\texttt{abbaa} \to \texttt{babbaa}$

(d) $E \to EE \to EEE \to \texttt{a}E\texttt{b}EE \to \texttt{a}E\texttt{b}E\texttt{a}E\texttt{b} \to \texttt{ab}E\texttt{a}E\texttt{b} \to \texttt{abb}E\texttt{aa}E\texttt{b} \to \texttt{abb}E\texttt{aab} \to \texttt{abbaab}$

Note que, neste enunciado, a derivação fornecida não está clara: a produção $EE \to EEE$ utilizou a regra de produção $E \to EE$, porém esta regra pode ser aplicada nos dois E's em EE para obter este resultado. Estas duas possibilidades correspondem a árvores de derivações diferentes, portanto em derivações diferentes, mas que podem alcançar a palavra gerada babbaa através da mesma sequência de palavras intermediárias.

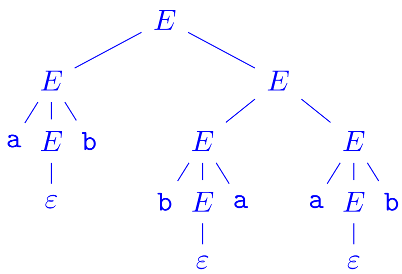
Caso a segunda produção seja $\underline{E}E \to \underline{EE}E$:



Derivação mais à esquerda:
$E \to EE \to EEE \to \texttt{a}E\texttt{b}EE \to \texttt{ab}EE \to \texttt{abb}E\texttt{a}E \to \texttt{abba}E \to \texttt{abbaa}E\texttt{b} \to \texttt{abbaab}$

Derivação mais à direita:
$E \to EE \to E\texttt{a}E\texttt{b} \to E\texttt{ab} \to EE\texttt{ab} \to E\texttt{b}E\texttt{aab} \to E\texttt{baab} \to \texttt{a}E\texttt{bbaab} \to \texttt{abbaab}$

Caso a segunda produção seja $E\underline{E} \to E\underline{EE}$:



Derivação mais à esquerda:
$E \to EE \to \texttt{a}E\texttt{b}E \to \texttt{ab}E \to \texttt{ab}EE \to \texttt{abb}E\texttt{a}E \to \texttt{abba}E \to \texttt{abbaa}E\texttt{b} \to \texttt{abbaab}$

Derivação mais à direita:
$E \to EE \to EEE \to EE\texttt{a}E\texttt{b} \to EE\texttt{ab} \to E\texttt{b}E\texttt{aab} \to E\texttt{baab} \to \texttt{a}E\texttt{bbaab} \to \texttt{abbaab}$

Questão 4 . . . .

Mostre que as gramáticas a seguir são ambíguas[1]:

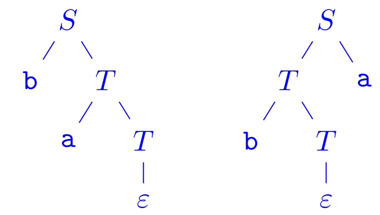
Resposta:

Em todos os itens abaixo, basta apresentar uma única palavra que possua duas árvores de derivação distintas. As respostas abaixo são apenas um exemplo.

(a) $G = (\{S, T\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, S)$, com regras de produção:

$$S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T \mid T\mathtt{a}$$
$$T \to \mathtt{a}T \mid \mathtt{b}T \mid \varepsilon$$

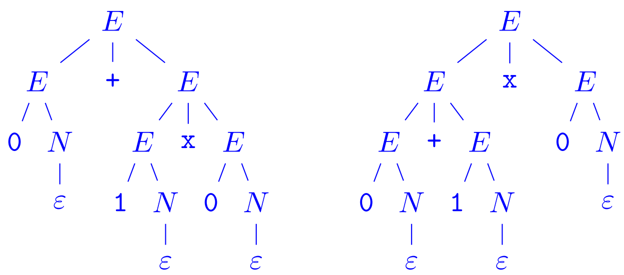
A palavra `ba` possui duas árvores de derivação distintas:



(b) $G = (\{E, O, N\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{x}\}, P, E)$, com regras de produção:

$$E \to EOE \mid \mathtt{0}N \mid \mathtt{1}N$$
$$O \to \mathtt{+} \mid \mathtt{x}$$
$$N \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \varepsilon$$

A palavra `0+1x0` possui duas árvores de derivação distintas:

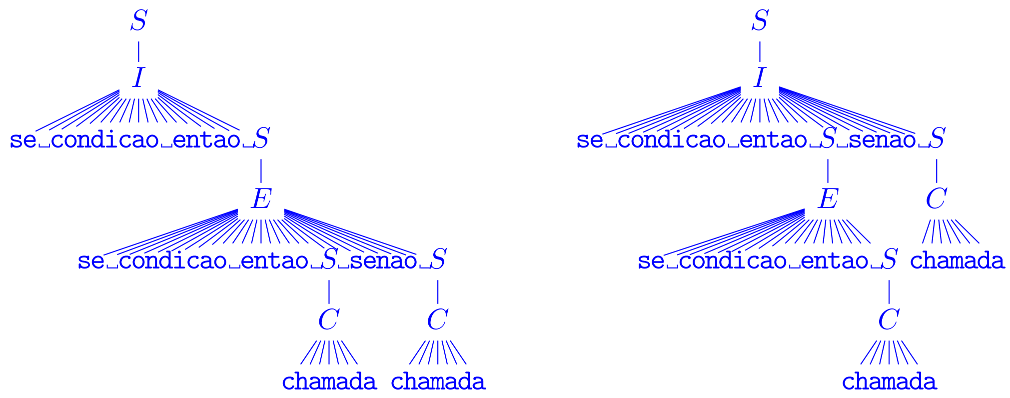


[1] O caracter ␣ é utilizado em tipografia para representar um espaço em branco, quando a escrita do espaço neste mesmo lugar pode deixar a leitura confusa ou ambígua. Logo, nas gramáticas onde este símbolo aparece, o terminal listado nesta gramática é na verdade um caracter "espaço em branco", e não o próprio caracter ␣.

(c) $G = (\{S, I, E, C\}, \{\texttt{a}, \ldots, \texttt{z}, \textvisiblespace\}, P, S)$, com regras de produção:

$$
\begin{aligned}
S &\to C \mid I \mid E \\
I &\to \texttt{se condicao entao } S \\
E &\to \texttt{se condicao entao } S \texttt{ senao } S \\
C &\to \texttt{chamada}
\end{aligned}
$$

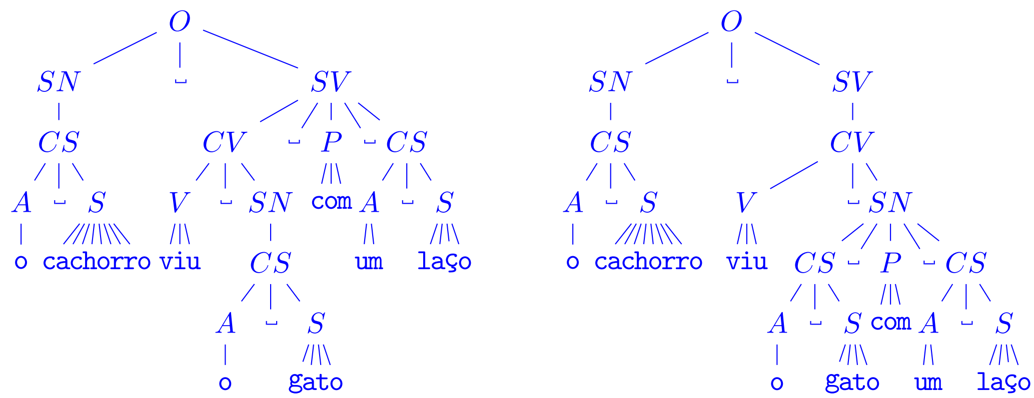
A palavra `se condicao entao se condicao entao chamada senao chamada` **possui duas árvores de derivação distintas:**



(d) $G = (\{O, SN, SV, CS, CV, A, S, V, P\}, \{\texttt{a}, \ldots, \texttt{z}, \texttt{ç}, \texttt{ó}, \textvisiblespace\}, P, S)$, com regras de produção:

$$
\begin{aligned}
O &\to SN\textvisiblespace SV \\
SN &\to CS \mid CS\textvisiblespace P\textvisiblespace CS \\
SV &\to CV \mid CV\textvisiblespace P\textvisiblespace CS \\
CS &\to A\textvisiblespace S \\
CV &\to V \mid V\textvisiblespace SN \\
A &\to \texttt{o} \mid \texttt{um} \\
S &\to \texttt{gato} \mid \texttt{cachorro} \mid \texttt{laço} \mid \texttt{binóculo} \\
V &\to \texttt{viu} \mid \texttt{amarrou} \\
P &\to \texttt{com}
\end{aligned}
$$

A palavra `o cachorro viu o gato com um laço` **possui duas árvores de derivação distintas:**



Questão 5 . . . .

Converta as gramáticas apresentadas na questão 1 para a forma normal de Chomsky, e utilize o algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para determinar se as palavras listadas abaixo pertencem às respectivas linguagens:

(a) `1100`

$G = (\{S, I, J, U, Z\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, S)$, **com regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
S &\to UJ \mid UZ \mid \varepsilon \\
J &\to IZ \\
I &\to UJ \mid UZ \\
U &\to \mathtt{1} \\
Z &\to \mathtt{0}
\end{aligned}
$$

Resultado do algoritmo CYK:

S,I			
	J		
	S,I		
U	**U**	**Z**	**Z**
1	1	0	0

`1100` **pertence à linguagem**

(b) `1x1)`

$G = (\{S, E, T, F, M, V, L, R, O, P, Q\}, \{\mathtt{+}, \mathtt{x}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{1}\}, P, S)$, **com regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
S &\to EO \mid TP \mid LQ \mid \mathtt{1} \\
E &\to EO \mid TP \mid LQ \mid \mathtt{1} \\
T &\to TP \mid LQ \mid \mathtt{1} \\
F &\to LQ \mid \mathtt{1} \\
O &\to MT \\
P &\to VF \\
Q &\to ER \\
M &\to \mathtt{+} \\
V &\to \mathtt{x} \\
L &\to \mathtt{(} \\
R &\to \mathtt{)}
\end{aligned}
$$

Resultado do algoritmo CYK:

Q			
S,E,T			
	P	**Q**	
S,E,T,F	**V**	**S,E,T,F**	**R**
1	x	1	)

`1x1)` **não pertence à linguagem**

(c) `rstssrs`

$G = (\{S, M, N, O, P\}, \{\mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}, P, S)$, **com regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
S &\to NO \mid \mathtt{t} \\
M &\to NO \mid \mathtt{t} \\
N &\to \mathtt{r} \mid \mathtt{s} \\
O &\to MP \\
P &\to NN
\end{aligned}
$$

Resultado do algoritmo CYK:

M,S						
	O					
	M,S					
		O				
P			**P**	**P**	**P**	
N	**N**	**M**	**N**	**N**	**N**	**N**
r	s	t	s	s	r	s

`rstssrs` **pertence à linguagem**

(d) `aabaa`

$G = (\{A, B, C, D\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, A)$, **com regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
A &\to BB \\
B &\to BD \mid CB \mid \mathtt{a} \\
C &\to \mathtt{b} \\
D &\to BB
\end{aligned}
$$

Resultado do algoritmo CYK:

A,D				
B	**B**			
	A,D	**A,D**		
A,D		**B**	**A,D**	
B	**B**	**C**	**B**	**B**
a	a	b	a	a

`aabaa` **pertence à linguagem**

(e) `+.+.+`

$G = (\{S, T, M, R\}, \{\texttt{+}, \texttt{.}\}, P, S)$, **com regras de produção:**

$$S \to TT$$
$$T \to MR \mid \texttt{.}$$
$$R \to TM$$
$$M \to \texttt{+}$$

Resultado do algoritmo CYK:

S	**S**			
T		**T**		
	R		**R**	
M	**T**	**M**	**T**	**M**
+	.	+	.	+

`+.+.+` **não pertence à linguagem**

(f) `abab`

$G = (\{O, R, T, X, A, B, G\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, P, O)$, **com regras de produção:**

$$O \to XG \mid AH \mid BI \mid AB \mid BA$$
$$R \to XG \mid AH \mid BI \mid AB \mid BA$$
$$T \to XT \mid \texttt{a} \mid \texttt{b}$$
$$X \to \texttt{a} \mid \texttt{b}$$
$$G \to RX$$
$$H \to TB$$
$$I \to TA$$
$$A \to \texttt{a}$$
$$B \to \texttt{b}$$

Resultado do algoritmo CYK:

O,T,H			
T,G,H	**T,G,H**		
O,R, T,H	**O,R, T,I**	**O,R, T,H**	
T,X,A	**T,X,B**	**T,X,A**	**T,X,B**
a	b	a	b

`abab` **pertence à linguagem**

Questão 6 . . . .

Mostre que, se L_1 e L_2 são linguagens livres de contexto, as linguagens a seguir também são livres de contexto:

Resposta:

A ideia, em todos os itens, é usar GLCs que geram L_1 e L_2 para construir uma nova gramática que gere a linguagem dada e que também seja livre de contexto. Para dar nome a estas GLCs, chamamos $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ a gramática que gera L_1, e $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$ a que gera L_2. Vamos também supor, para não misturar, que as variáveis usadas nas duas gramáticas são diferentes: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (afinal, é só renomear as variáveis se necessário).

(a) $L_1 \cup L_2$

Nossa nova gramática deve poder deriva todas as palavras que G_1 deriva e todas as palavras que G_2 deriva. A ideia é que criar um novo símbolo inicial S_0 para essa gramática e, a partir dele, tudo que podemos fazer é "decidir" qual gramática usar: se quisermos usar G_1, produzimos S_1, e se quisermos usar G_2, produzirmos S_2. A partir daí, somente as derivações permitidas por G_1 e G_2 podem ocorrer.

A gramática combinada fica: $G = (V, T, P, S)$, com $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S_0\}$, $T = T_1 \cup T_2$, $S = S_0$ e $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S_0 \to S_1, S_0 \to S_2\}$.

(b) $L_1 \cdot L_2$

Nosso objetivo agora é gerar palavras de L_1 concatenadas com palavras de L_2. A ideia é parecida: a partir do símbolo inicial S_0, demarcamos as duas "partes" da palavra final usando os símbolos iniciais de G_1 e G_2. A gramática combinada fica: $G = (V, T, P, S)$, com $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S_0\}$, $T = T_1 \cup T_2$, $S = S_0$ e $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S_0 \to S_1 S_2\}$.

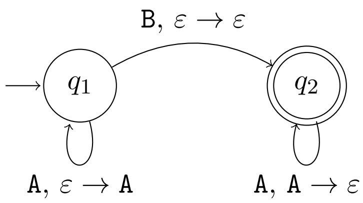
(c) $L_1{}^*$

Nosso objetivo agora é gerar sequências de palavras de L_1. Podemos fazer isso pegando o novo símbolo inicial S_0 e usando-o para definir quantas palavras de L_1 vamos concatenar, e derivando cada palavra de L_1 separadamente. A gramática combinada fica: $G = (V, T, P, S)$, com $V = V_1 \cup \{S_0\}$, $T = T_1$, $S = S_0$ e $P = P_1 \cup \{S_0 \to S_0 S_1, S_0 \to \varepsilon\}$.

Questão 7 . . . .

Para cada um dos autômatos de pilha abaixo, apresente a sua descrição formal, determine se ele irá aceitar a palavra w apresentada, e determine qual linguagem ele reconhece.

(a)

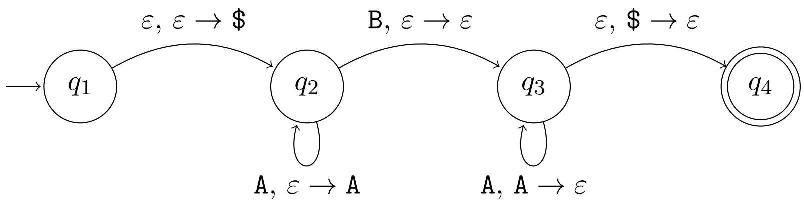


$\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$, $\Gamma = \{\mathtt{A}\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_2\}$ e:

δ Σ_ε	A		B		ε	
Q Γ_ε	A	ε	A	ε	A	ε
q_1	$\emptyset$	$\{(q_1, \mathtt{A})\}$	$\emptyset$	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\{(q_2, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$w = \mathtt{AAABAA}$ é aceita; $L(M) = \{\mathtt{A}^n\mathtt{B}\mathtt{A}^m \ : \ m \leq n\}$.

(b)

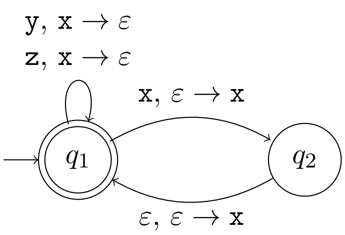


$\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$, $\Gamma = \{\mathtt{A}, \$\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_4\}$ e:

δ Σ_ε	A			B			ε		
Q Γ_ε	A	\$	ε	A	\$	ε	A	\$	ε
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, \$)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, \mathtt{A})\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_4, \varepsilon)\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{(q_4, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$w = \mathtt{AAABAA}$ é rejeitada; $L(M) = \{\mathtt{A}^n\mathtt{B}\mathtt{A}^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(c)

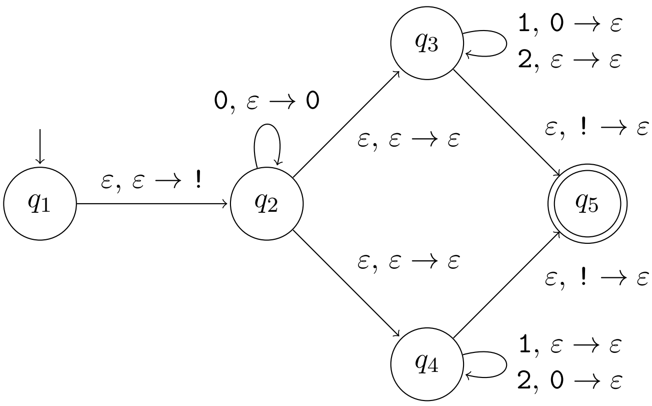


$\Sigma = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$, $\Gamma = \{\mathtt{x}\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_4\}$ **e:**

δ Σ_ε	x		y		z		ε	
Q Γ_ε	x	ε	x	ε	x	ε	x	ε
q_1	$\emptyset$	$\{(q_2, \mathtt{x})\}$	$\{(q_1, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\{(q_1, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_1, \mathtt{x})\}$

$w = \mathtt{xzxyzy}$ **é aceita;** $L(M) = \{w \in \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}^* \ : $ **todo prefixo de** w **tem** $2 \cdot \#\mathtt{x} \geq \#\mathtt{y} + \#\mathtt{z}\}$ **(todo x em** w **"cancela" até dois símbolos y ou z posteriores).**

(d)

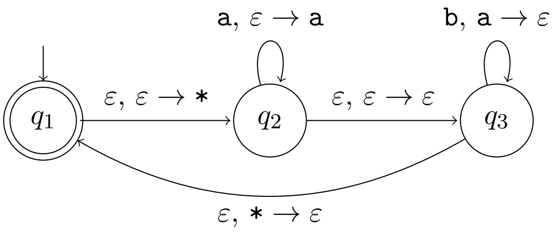


$\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $\Gamma = \{0, !\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_5\}$ **e:**

δ Σ_ε	0			1			2			ε		
Q Γ_ε	0	!	ε	0	!	ε	0	!	ε	0	!	ε
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, !)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, 0)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon), (q_4, \varepsilon)\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\{(q_5, \varepsilon)\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_4, \varepsilon)\}$	$\{(q_4, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_5, \varepsilon)\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$w = 0011212$ **é aceita;** $L(M) = \{0^n w \ : \ w \in \{1, 2\}^*, w$ **tem exatamente** n **1's ou** n **2's**$\}$**.**

(e)



$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $\Gamma = \{\mathtt{a}, *\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_5\}$ **e:**

δ Σ_ε	a			b			ε		
Q Γ_ε	a	*	ε	a	*	ε	a	*	ε
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, *)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, \mathtt{a})\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_1, \varepsilon)\}$	$\emptyset$

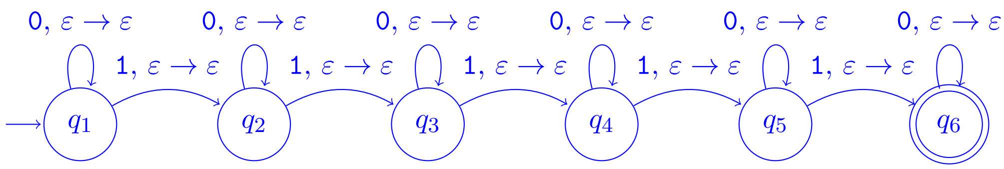
$w = \mathtt{aaabbbaabaabb}$ **é rejeitada;** $L(M) = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n\}^*$

Questão 8 . . . .

Para cada linguagem da questão 2, apresente um autômato de pilha que a reconhece.

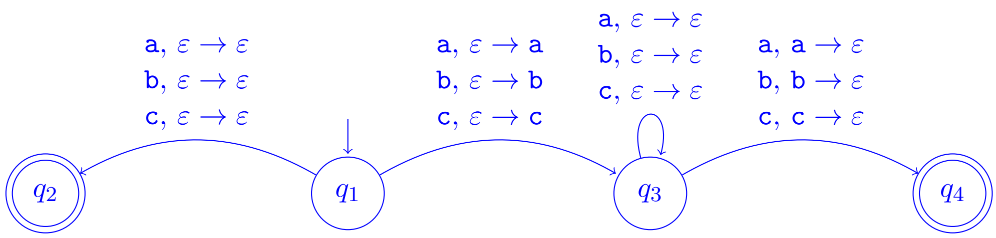
Resposta:

(a)



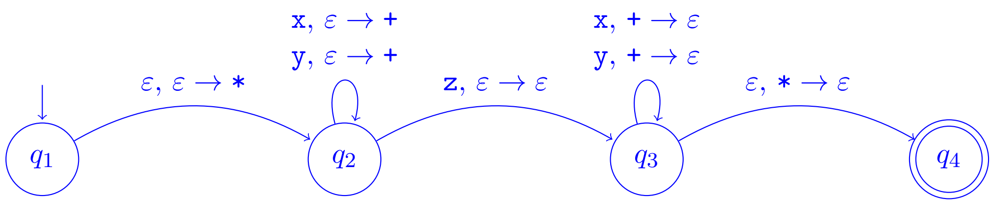
Note como este autômato de pilha efetivamente não utiliza a pilha (nenhuma transição permitida realiza um *push* ou *pop* sobre a pilha), ou seja, esse autômato de pilha efetivamente se comporta como um AFN. Isso só é possível porque a linguagem que queremos reconhecer é regular.

(b)

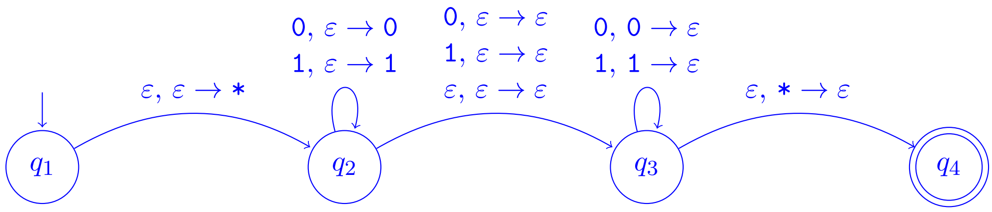


Esta linguagem também é regular; neste caso, utilizar um autômato de pilha nos permitiu utilizar menos estados do que com um AFN.

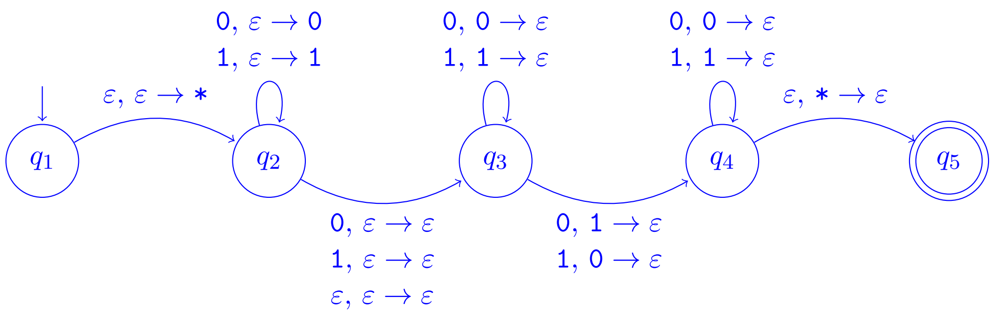
(c)



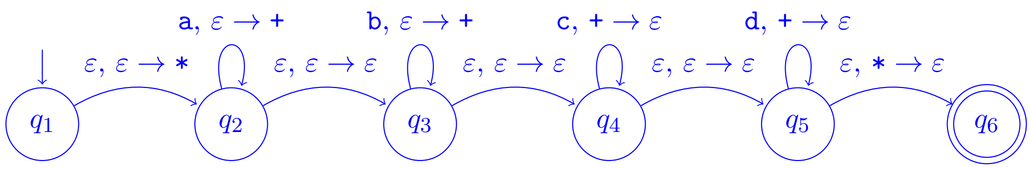
(d)



(e)



(f)



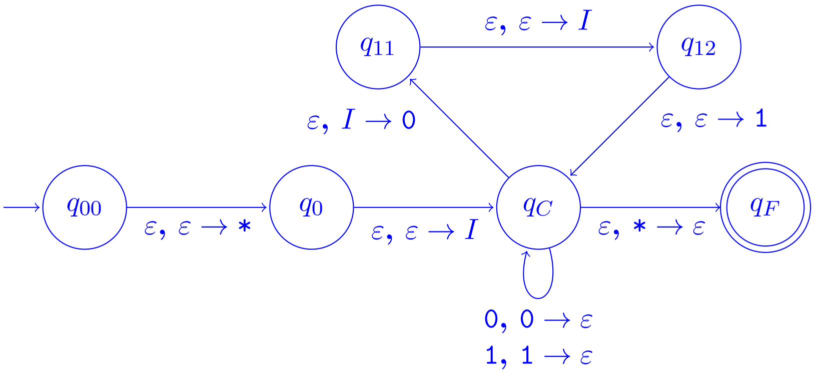
Questão 9 . . . .

Para cada gramática da questão 1, apresente um autômato de pilha que reconhece a linguagem gerada pela gramática.

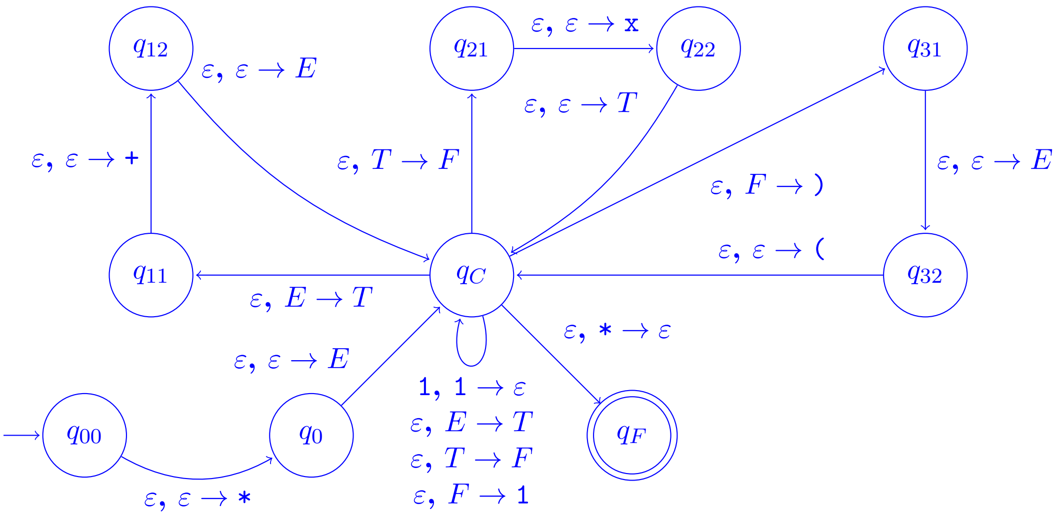
Resposta:

As soluções abaixo utilizam a construção apresentada em sala. Outras soluções são possíveis, por exemplo, realizando simplificações.

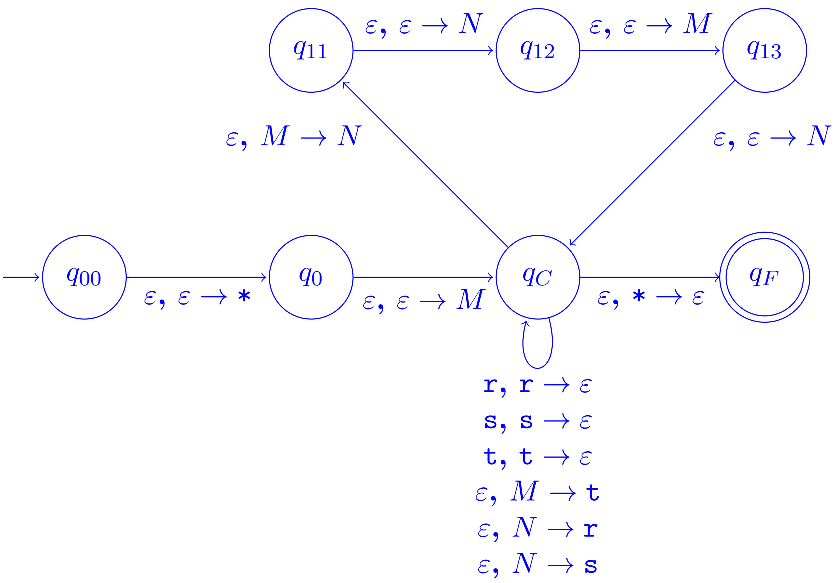
(a)



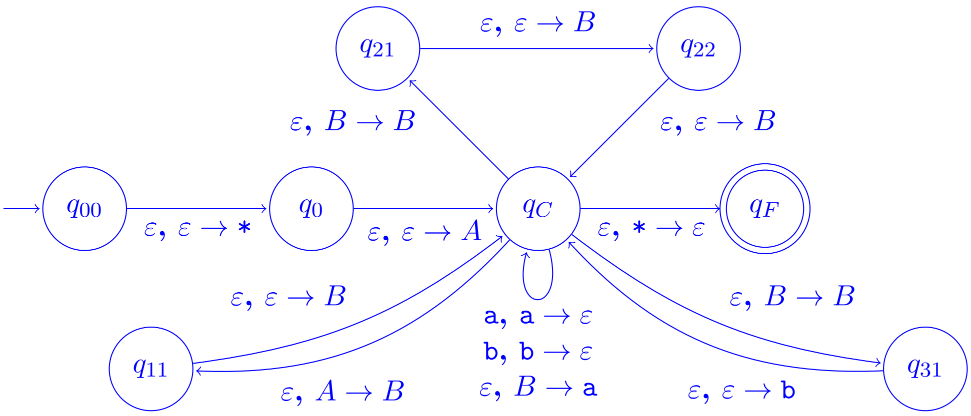
(b)



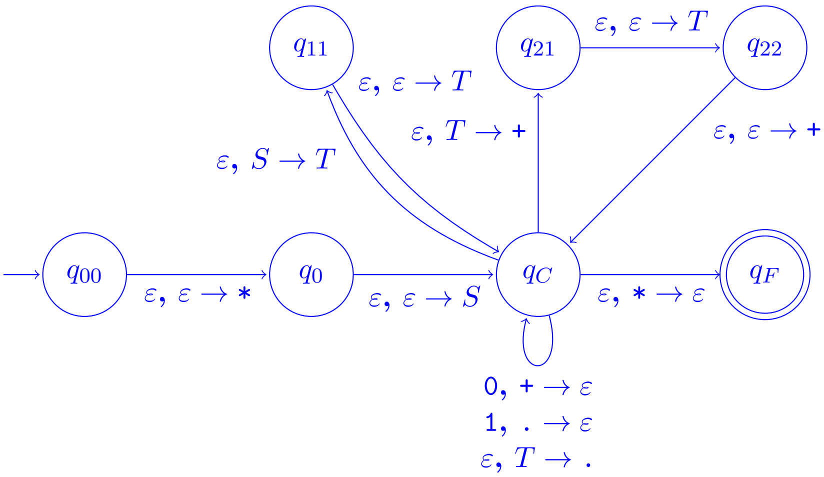
(c)



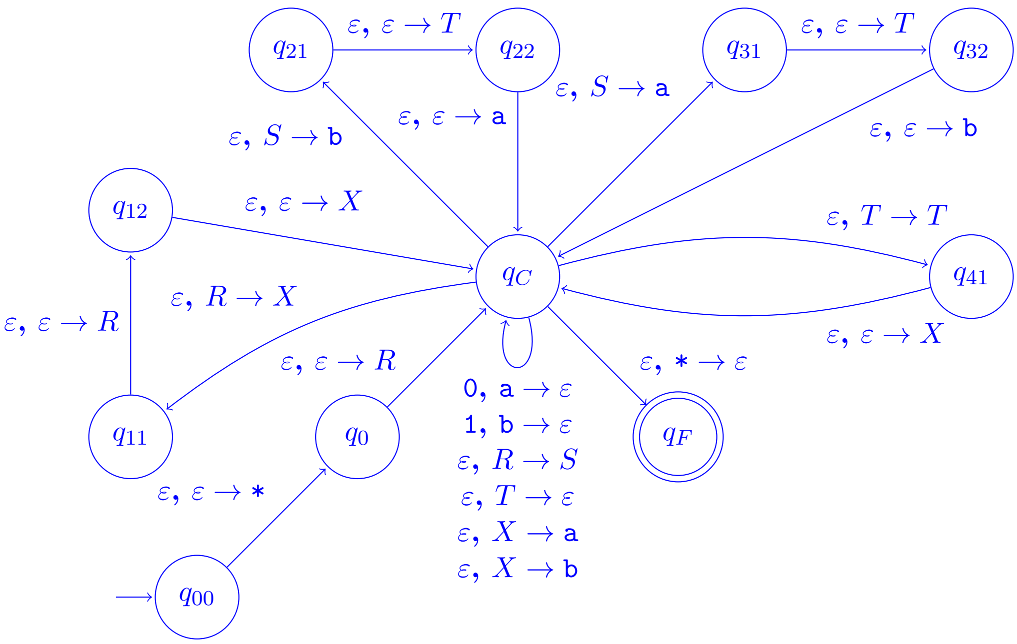
(d)



(e)



(f)



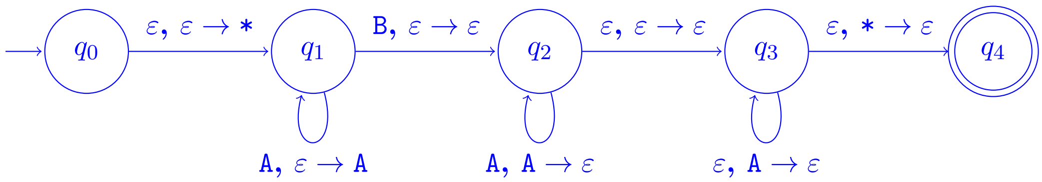
Questão 10 ....

Para cada autômato de pilha da questão 7, apresente uma gramática que gera a linguagem reconhecida pelo autômato.

Resposta:

As soluções abaixo utilizam a construção apresentada em sala. Nos itens (a) e (c), devemos antes adaptar os autômatos para somente aceitar palavras com a pilha vazia. As variáveis correspondentes a estados sem caminho de um para o outra foram suprimidas, para diminuir o tamanho da gramática resultante. Outras soluções são possíveis.

(a) Adaptando o autômato:



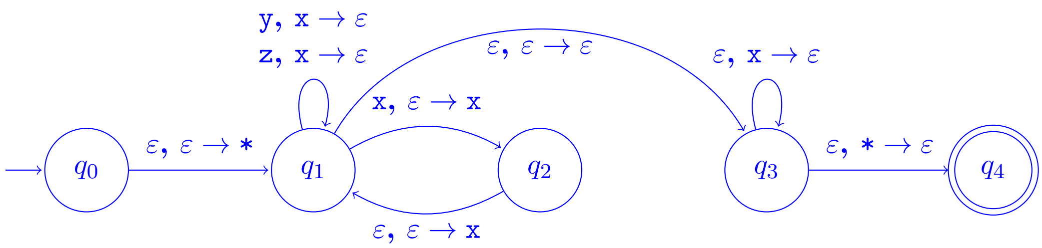
A gramática gerada é $G = (V, T, P, S)$**, com** $V = \{S_{00}, S_{01}, S_{02}, S_{03}, S_{04}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{33}, S_{34}, S_{44}\}$, $T = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$, $S = S_{14}$ **e regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
&S_{00} \to S_{00}S_{00} \mid \varepsilon \\
&S_{01} \to S_{00}S_{01} \mid S_{01}S_{11} \\
&S_{02} \to S_{00}S_{02} \mid S_{01}S_{12} \mid S_{02}S_{22} \\
&S_{03} \to S_{00}S_{03} \mid S_{02} \mid S_{01}S_{13} \mid S_{02}S_{23} \mid S_{03}S_{33} \\
&S_{04} \to S_{13} \mid S_{00}S_{04} \mid S_{01}S_{14} \mid S_{02}S_{24} \mid S_{03}S_{34} \mid S_{04}S_{44} \\
&S_{11} \to S_{11}S_{11} \mid \varepsilon \\
&S_{12} \to \mathtt{A}S_{12}\mathtt{A} \mid \mathtt{B}S_{22} \mid S_{11}S_{12} \mid S_{12}S_{22} \\
&S_{13} \to \mathtt{A}S_{13} \mid \mathtt{B}S_{23} \mid S_{12} \mid S_{11}S_{13} \mid S_{12}S_{23} \mid S_{13}S_{33} \\
&S_{14} \to \mathtt{B}S_{24} \mid S_{11}S_{14} \mid S_{12}S_{24} \mid S_{13}S_{34} \mid S_{14}S_{44} \\
&S_{22} \to S_{22}S_{22} \mid \varepsilon \\
&S_{23} \to S_{22} \mid S_{33} \mid S_{22}S_{23} \mid S_{23}S_{33} \\
&S_{24} \to S_{34} \mid S_{22}S_{24} \mid S_{23}S_{34} \mid S_{24}S_{44} \\
&S_{33} \to S_{33}S_{33} \mid \varepsilon \\
&S_{34} \to S_{33}S_{34} \mid S_{34}S_{44} \\
&S_{44} \to S_{44}S_{44} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(b) A gramática gerada é $G = (V, T, P, S)$**, com** $V = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{33}, S_{34}, S_{44}\}$, $T = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$, $S = S_{14}$ **e regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
&S_{11} \to S_{11}S_{11} \mid \varepsilon \\
&S_{12} \to S_{11}S_{12} \mid S_{12}S_{22} \\
&S_{13} \to S_{12}\mathtt{B} \mid S_{11}S_{13} \mid S_{12}S_{23} \mid S_{13}S_{33} \\
&S_{14} \to S_{23} \mid S_{11}S_{14} \mid S_{12}S_{24} \mid S_{13}S_{34} \mid S_{14}S_{44} \\
&S_{22} \to S_{22}S_{22} \mid \varepsilon \\
&S_{23} \to \mathtt{A}S_{23}\mathtt{A} \mid S_{22}\mathtt{B} \mid \mathtt{B}S_{33} \mid S_{23}S_{34} \mid S_{24}S_{44} \\
&S_{24} \to \mathtt{B}S_{34} \mid S_{22}S_{24} \mid S_{23}S_{34} \mid S_{24}S_{44} \\
&S_{33} \to S_{33}S_{33} \mid \varepsilon \\
&S_{34} \to S_{33}S_{34} \mid S_{34}S_{44} \\
&S_{44} \to S_{44}S_{44} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(c) Adaptando o autômato:



A gramática gerada é $G = (V, T, P, S)$**, com** $V = \{S_{00}, S_{01}, S_{02}, S_{03}, S_{04}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{33}, S_{34}, S_{44}\}$**,** $T = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$**,** $S = S_{04}$ **e regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
S_{00} &\to S_{00}S_{00} \mid \varepsilon\\
S_{01} &\to S_{00}S_{01} \mid S_{01}S_{11}\\
S_{02} &\to S_{00}S_{02} \mid S_{01}S_{12} \mid S_{02}S_{22}\\
S_{03} &\to S_{01} \mid S_{00}S_{03} \mid S_{01}S_{13} \mid S_{02}S_{23} \mid S_{03}S_{33}\\
S_{04} &\to S_{13} \mid S_{00}S_{04} \mid S_{01}S_{14} \mid S_{02}S_{24} \mid S_{03}S_{34} \mid S_{04}S_{44}\\
S_{11} &\to \mathtt{x}S_{21}\mathtt{y} \mid \mathtt{x}S_{21}\mathtt{z} \mid S_{11}S_{11} \mid S_{12}S_{21} \mid \varepsilon\\
S_{12} &\to S_{11}S_{12} \mid S_{12}S_{22}\\
S_{13} &\to \mathtt{x}S_{23} \mid S_{11} \mid S_{33} \mid S_{11}S_{13} \mid S_{12}S_{23} \mid S_{13}S_{33}\\
S_{14} &\to S_{34} \mid S_{11}S_{14} \mid S_{12}S_{24} \mid S_{13}S_{34} \mid S_{14}S_{44}\\
S_{21} &\to S_{11}\mathtt{y} \mid \mathtt{x}S_{11}\mathtt{z} \mid S_{21}S_{11} \mid S_{22}S_{21}\\
S_{22} &\to S_{21}S_{12} \mid S_{22}S_{22} \mid \varepsilon\\
S_{23} &\to S_{13} \mid S_{21} \mid S_{21}S_{13} \mid S_{22}S_{23} \mid S_{23}S_{33}\\
S_{24} &\to S_{21}S_{14} \mid S_{22}S_{24} \mid S_{23}S_{34} \mid S_{24}S_{44}\\
S_{33} &\to S_{33}S_{33} \mid \varepsilon\\
S_{34} &\to S_{33}S_{34} \mid S_{34}S_{44}\\
S_{44} &\to S_{44}S_{44} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(d) A gramática gerada é $G = (V, T, P, S)$**, com** $V = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{33}, S_{34}, S_{44}\}$**,** $T = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}$**,** $S = S_{15}$ **e regras de produção:**

$$
\begin{aligned}
S_{11} &\to S_{11}S_{11} \mid \varepsilon\\
S_{12} &\to S_{11}S_{12} \mid S_{12}S_{22}\\
S_{13} &\to S_{12} \mid S_{13}\mathtt{2} \mid S_{11}S_{13} \mid S_{12}S_{23} \mid S_{13}S_{33}\\
S_{14} &\to S_{12} \mid S_{14}\mathtt{1} \mid S_{11}S_{14} \mid S_{12}S_{24} \mid S_{14}S_{44}\\
S_{15} &\to S_{23} \mid S_{24} \mid S_{11}S_{15} \mid S_{12}S_{25} \mid S_{13}S_{35} \mid S_{14}S_{45} \mid S_{15}S_{55}\\
S_{22} &\to S_{22}S_{22} \mid \varepsilon\\
S_{23} &\to \mathtt{0}S_{23}\mathtt{1} \mid S_{22} \mid S_{33} \mid S_{23}\mathtt{2} \mid S_{22}S_{23} \mid S_{23}S_{33}\\
S_{24} &\to \mathtt{0}S_{24}\mathtt{2} \mid S_{22} \mid S_{34} \mid S_{24}\mathtt{1} \mid S_{22}S_{24} \mid S_{24}S_{44}\\
S_{25} &\to S_{35} \mid S_{45} \mid S_{22}S_{25} \mid S_{23}S_{35} \mid S_{24}S_{45} \mid S_{25}S_{55}\\
S_{33} &\to \mathtt{2}S_{33} \mid S_{33}S_{33} \mid \varepsilon\\
S_{35} &\to \mathtt{2}S_{35} \mid S_{33}S_{35} \mid S_{35}S_{55}\\
S_{44} &\to \mathtt{1}S_{44} \mid S_{44}S_{44} \mid \varepsilon\\
S_{45} &\to \mathtt{1}S_{45} \mid S_{44}S_{45} \mid S_{45}S_{55}\\
S_{55} &\to S_{55}S_{55} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(e) A gramática gerada é $G = (V, T, P, S)$, com $V = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{33}, S_{34}, S_{44}\}$, $T = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}$, $S = S_{15}$ e regras de produção:

$$\begin{aligned}
S_{11} &\to S_{23} \mid S_{11}S_{11} \mid S_{12}S_{21} \mid S_{13}S_{31} \mid \varepsilon \\
S_{12} &\to S_{11}S_{12} \mid S_{12}S_{22} \mid S_{13}S_{32} \\
S_{13} &\to S_{12} \mid S_{11}S_{13} \mid S_{12}S_{23} \mid S_{13}S_{33} \\
S_{21} &\to S_{31} \mid S_{21}S_{11} \mid S_{22}S_{21} \mid S_{23}S_{31} \\
S_{22} &\to S_{32} \mid S_{21}S_{12} \mid S_{22}S_{22} \mid S_{23}S_{32} \mid \varepsilon \\
S_{23} &\to \mathtt{a}S_{23}\mathtt{b} \mid S_{22} \mid S_{33} \mid S_{21}S_{13} \mid S_{22}S_{23} \mid S_{23}S_{33} \\
S_{31} &\to S_{31}S_{11} \mid S_{32}S_{21} \mid S_{33}S_{31} \\
S_{32} &\to S_{31}S_{12} \mid S_{32}S_{22} \mid S_{33}S_{32} \\
S_{33} &\to S_{32} \mid S_{31}S_{13} \mid S_{32}S_{23} \mid S_{33}S_{33} \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Questão 11 ....

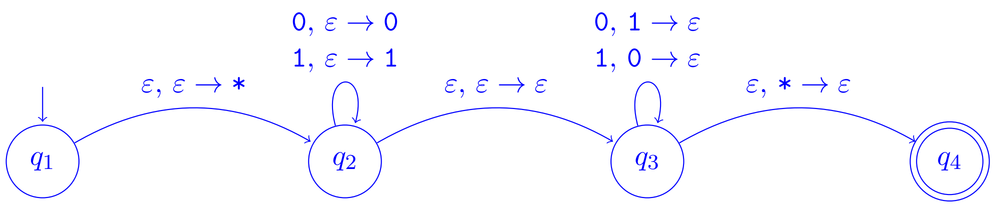
Considere a linguagem $L = \{b \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* : b \otimes b^R = \mathtt{1}^{|b|}\}$ (onde o operador binário $\otimes$ trata os símbolos $\mathtt{0}$ e $\mathtt{1}$ como os valores binários 0 e 1). Construa um autômato de pilha que reconhece essa linguagem e uma gramática livre de contexto que gera essa linguagem.

Resposta:

Note que, em palavras de L, o primeiro símbolo deve ser diferente do último, o segundo, diferente do penúltimo, e assim por diante. Além disso, nenhuma palavra pode ter comprimento ímpar pois os símbolos centrais de b e b^R seriam iguais e o símbolo central de $b \otimes b^R$ seria igual a $\mathtt{0}$. Podemos dizer que as palavras de L são os "antipalíndromos": palavras que são diferentes de seus reversos em todos os símbolos.
A seguinte gramática gera L: $G = (\{M\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, M)$, com regras de produção:

$$M \to \mathtt{0}M\mathtt{1} \mid \mathtt{1}M\mathtt{0} \mid \varepsilon$$

O seguinte autômato de pilha reconhece L:



Questão 12 ....

Seja Σ um alfabeto qualquer e $RE(\Sigma)$ o conjunto de todas as expressões regulares válidas sobre Σ.

Devemos tomar cuidado para não confundir os símbolos de $RE(\Sigma)$ com a notação matemática. Para diferenciar, denotaremos os símbolos de $RE(\Sigma)$ com uma fonte diferente.

(a) Determine o alfabeto de $RE(\Sigma)$.

Resposta:

$RE(\Sigma)$ é uma linguagem sobre o alfabeto $\Sigma \cup \{\mathtt{\emptyset}, \mathtt{e}, \mathtt{|}, \cdot, \mathtt{*}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}$.

(b) Mostre que $RE(\Sigma)$ não é uma linguagem regular.

Resposta:

Suponha que $RE(\Sigma)$ é regular. Então, existe um inteiro n que é comprimento de bombeamento de $RE(\Sigma)$. Considere, agora, a palavra $w = (^n\emptyset()*)^n$. Esta palavra é uma expressão regular válida sobre Σ (é o resultado de pegar a linguagem vazia e aplicar n vezes o operador de Kleene), logo ela pertence a L. Para tentar bombear w, precisamos dividir w em três partes: $w = pms$, com $|m| \geq 1$ e $|pm| \leq n$. Agora, como $|pm| \leq n$, para qualquer divisão permitida, p e m devem ser formadas apenas por ('s. Escrevendo $P = |p|$ e $M = |m|$, isto significa que $p = (^P$, $m = (^M$ e $s = (^{n-P-M}\emptyset()*)^n$.
Após bombearmos, teremos $pm^is = (^{n+M(i-1)}\emptyset()*)^n$. Note que esta palavra só irá pertencer a L se $n + M(i-1) = n$ (isto é, se $i = 1$), pois, caso contrário, as combinações de (e) ficarão desbalanceadas. Isto significa que qualquer tentativa de bombeamento não funciona, logo w não pode ser bombeada. Isto contradiz o fato de n ser comprimento de bombeamento de $RE(\Sigma)$, portanto, $RE(\Sigma)$ não é regular.

(c) Mostre que $RE(\Sigma)$ é uma linguagem livre de contexto.

Resposta:

A forma mais simples de mostrar que $RE(\Sigma)$ é livre de contexto é apresentar uma gramática livre de contexto que gera todas as possíveis expressões regulares. Um exemplo de GLC que gera $RE(\Sigma)$ é a gramática $G = (\{E\}, \Sigma \cup \{\emptyset, \mathtt{e}, |, \cdot, *, (,)\}, P, E)$, com regras de produção:

$$E \to \emptyset \mid \mathtt{e} \mid E|E \mid EE \mid E{\cdot}E \mid E* \mid (E)*$$

$$E \to \mathtt{x} \qquad \text{para todo símbolo } \mathtt{x} \text{ em } \Sigma$$

Note que a quantidade de regras da gramática depende do tamanho do alfabeto Σ.

Questão 13 ....

Mostre que cada uma das linguagens abaixo não é livre de contexto.

Resposta:

Em todos os itens abaixo, devemos aplicar o Lema do Bombeamento para Linguagens Livres de Contexto. A estratégia é a mesma que usávamos para linguagens regulares: precisamos mostrar que nenhum número inteiro n pode servir de comprimento de bombeamento para estas linguagens. O desafio aqui, então, é garantir que podemos descartar qualquer inteiro k como candidato a comprimento de bombeamento. Para isso, precisamos encontrar alguma palavra de comprimento k ou maior que não pode ser bombeada, isto é, que para qualquer tentativa de bombeamento, haverá alguma palavra bombeada que não pertence à linguagem em questão.
Porém, a forma de bombeamento a ser realizada para uma LLC é diferente daquela utilizada para LRs. As partições que estamos interessados seguem o formato: $w = pm_1cm_2s$, onde $m_1m_2 \neq \varepsilon$ e $|m_1cm_2| \leq k$. O resultado do bombeamento, para algum inteiro $i \geq 0$, é a palavra $p{m_1}^icm_2{}^is$.

(a) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \ : \ n \geq 0\}$

Suponha que k é comprimento de bombeamento desta linguagem. Considere a palavra $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k$. Em qualquer partição permitida $w = pm_1cm_2s$ desta palavra, m_1 e m_2 não podem ao mesmo tempo ter a's e c's (já que $|m_1cm_2| \leq k$ e existem k b's entre os a's e os c's). Podemos ter então três casos:

1. **m_1m_2 contém a's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum c e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais a's do que c's, portanto não pertence a L_1;**
2. **m_1m_2 contém c's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum a e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais c's do que a's, portanto não pertence a L_1;**
3. **m_1m_2 não contém nem a's nem c's; neste caso, como $m_1m_2 \neq \varepsilon$, m_1m_2 deve conter ao menos um b e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais b's do que a's e c's, portanto não pertence a L_1.**

Isto mostra que todas as tentativas de partição de w falham em manter as palavras bombeadas na linguagem. Portanto, L_1 não é livre de contexto.

(b) $L_2 = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \ : \ 0 \leq i \leq j \leq k\}$

Suponha que n é comprimento de bombeamento desta linguagem. Considere a palavra $w = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n$. Em qualquer partição permitida $w = pm_1cm_2s$ desta palavra, m_1 e m_2 não podem ao mesmo tempo ter a's e c's (já que $|m_1cm_2| \leq n$ e existem n b's entre os a's e os c's). Podemos ter então três casos:

1. **m_1m_2 contém a's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum c e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais a's do que c's, portanto não pertence a L_2;**
2. **m_1m_2 contém c's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum a e, para $i = 0$, a palavra bombeada $pm_1{}^0cm_2{}^0 = pcs$ possui menos c's do que a's, portanto não pertence a L_2;**
3. **m_1m_2 não contém nem a's nem c's; neste caso, como $m_1m_2 \neq \varepsilon$, m_1m_2 deve conter ao menos um b e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais b's do que c's, portanto não pertence a L_2.**

Isto mostra que todas as tentativas de partição de w falham em manter as palavras bombeadas na linguagem. Portanto, L_2 não é livre de contexto.

(c) $L_3 = \{w \in \{\mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}^* \ : \ w$ possui a mesma quantidade de r's, s's e t's$\}$

Suponha que k é comprimento de bombeamento desta linguagem. Considere a palavra $w = \mathtt{r}^k\mathtt{s}^k\mathtt{t}^k$. Em qualquer partição permitida $w = pm_1cm_2s$ desta palavra, m_1 e m_2 não podem ao mesmo tempo ter r's e t's (já que $|m_1cm_2| \leq k$ e existem k s's entre os r's e os t's). Podemos ter então três casos:

1. **m_1m_2 contém r's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum t e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais r's do que t's, portanto não pertence a L_3;**
2. **m_1m_2 contém t's; neste caso, m_1m_2 não contém nenhum r e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais t's do que r's,**

portanto não pertence a L_3;

3. **m_1m_2 não contém nem `r`'s nem `t`'s; neste caso, como $m_1m_2 \neq \varepsilon$, m_1m_2 deve conter ao menos um `s` e, para qualquer $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ possui mais `s`'s do que `r`'s e `t`'s, portanto não pertence a L_3.**

Isto mostra que todas as tentativas de partição de w falham em manter as palavras bombeadas na linguagem. Portanto, L_3 não é livre de contexto.

(d) $L_4 = \{ww \;:\; w \in \{\mathtt{k},\mathtt{l}\}^*\}$
Suponha que n é comprimento de bombeamento desta linguagem. Considere a palavra $w = \mathtt{k}^n\mathtt{l}^n\mathtt{k}^n\mathtt{l}^n$. Em qualquer partição permitida $w = pm_1cm_2s$ desta palavra, m_1 e m_2 não podem ao mesmo tempo ter `k`'s dos dois grupos, já que há n `l`'s entre eles. Da mesma forma, m_1 e m_2 não podem ao mesmo tempo ter `l`'s dos dois grupos. Podemos ter então três casos:

1. **m_1m_2 não contém símbolos dos dois últimos grupos; neste caso, para $i = 0$, a palavra bombeada $pm_1{}^0cm_2{}^0s = pcs$ segue o formato $\mathtt{k}^x\mathtt{l}^y\mathtt{k}^n\mathtt{l}^n$, para algum x, y entre 0 e n e $x + y < 2n$. Note que a segunda metade de pcs começa no trecho que veio do segundo grupo de `k`'s. Assim, obrigatoriamente $pcs \notin L_4$, porque, para qualquer combinação de valores possível para x e y, a segunda metade de pcs é diferente da primeira (se $x = 0$, somente a segunda metade possui `k`'s; se $y = 0$, somente a segunda metade possui `l`'s; caso contrário, somente a primeira metade possui um `l` seguido de um `k`);**

2. **m_1m_2 não contém símbolos dos dois primeiros grupos; neste caso, para $i = 0$, $pm_1{}^0cm_2{}^0s = pcs$ segue o formato $\mathtt{k}^n\mathtt{l}^n\mathtt{k}^x\mathtt{l}^y$, para algum x, y entre 0 e n e $x + y < 2n$. Note que a segunda metade de pcs começa no trecho que veio do primeiro grupo de `l`'s. $pcs \notin L_4$, porque, para qualquer combinação de valores possível para x e y, a segunda metade de pcs é diferente da primeira (se $x = 0$, somente a primeira metade possui `k`'s; se $y = 0$, somente a primeira metade possui `l`'s; caso contrário, somente a segunda metade possui um `l` seguido de um `k`);**

3. **m_1m_2 contém símbolos dos dois grupos centrais; neste caso, $pm_1{}^0cm_2{}^0s = pcs$ segue o formato $\mathtt{k}^n\mathtt{l}^x\mathtt{k}^y\mathtt{l}^n$, para algum x, y entre 0 e $n - 1$. Note que todos os `k`'s do primeiro grupo estão na primeira metade de pcs, e todos os `l`'s do segundo grupo estão na segunda metade de pcs. Isto significa que a primeira metade de pcs possui menos `l`'s que a segunda metade, e a segunda metade de pcs possui menos `k`'s que a primeira metade. Logo, as duas metades de pcs não podem ser iguais, e $pcs \notin L_4$.**

Isto mostra que todas as tentativas de partição de w falham em manter as palavras bombeadas na linguagem. Portanto, L_4 não é livre de contexto.

(e) $L_5 = \{x\#y \;:\; x, y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \text{ e } x \text{ é subpalavra de } y\}$
Suponha que k é comprimento de bombeamento desta linguagem. Considere a palavra $w = \mathtt{0}^k\mathtt{1}^k\#\mathtt{0}^k\mathtt{1}^k$. Qualquer partição permitida $w = pm_1cm_2s$ desta palavra deve cair em um destes três casos:

1. **m_1m_2 contém o único `#` de w; neste caso, para $i = 0$, a palavra bombeada $pm_1{}^0cm_2{}^0s = pcs$ não possui símbolos `#`, logo $pcs \notin L_5$;**

2. **m_1m_2 está totalmente antes do `#`; neste caso, para $i > 1$, a palavra bombeada $pm_1{}^icm_2{}^is$ deve, antes do `#`, ter mais do que n `0`'s ou mais do**

que n `1`'s. Em ambos os casos, como somente há n `0`'s e n `1`'s depois do #, o trecho de $pm_1{}^icm_2{}^is$ que vem antes do # não é substring do trecho que vem depois. Portanto, $pm_1{}^icm_2{}^is \notin L_5$;

3. **m_1m_2 possui símbolos depois do #; neste caso, para $i = 0$, a palavra bombeada $pm_1{}^0cm_2{}^0s = pcs$ deve, depois do #, ter menos do que n `0`'s ou menos do que n `1`'s. No entanto, m_1 não pode conter nenhum símbolo do primeiro trecho de `0`'s, pois existem ao menos $n+1$ símbolos entre o final do primeiro trecho de `0`'s e o primeiro símbolo depois do #. Logo, em pcs há exatamente n `0`'s antes do #, o que significa que o trecho de pcs que vem antes do # não é substring do trecho que vem depois. Assim, $pcs \notin L_5$.**

Isto mostra que todas as tentativas de partição de w falham em manter as palavras bombeadas na linguagem. Portanto, L_5 não é livre de contexto.