Bacharelado em Sistemas de Informação
Disciplina: Linguagens Formais e Autômatos
2019.2 — Lista de exercícios 1 — GABARITO

Parte dos exercícios retirados da bibliografia da disciplina.

Revisão: Teoria de Conjuntos

Questão 1 ....

Examine as descrições formais dos conjuntos a seguir para compreender quais elementos eles contêm, e escreva uma descrição curta e informal em português de cada conjunto:

(a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
Conjunto dos números naturais ímpares

(b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
Conjunto dos números inteiros pares

(c) $\{n | n = 2m \text{ para algum } m \text{ em } \mathbb{N}\}$
Conjunto dos números naturais pares

(d) $\{n | n = 2m \text{ para algum } m \text{ em } \mathbb{N}, \text{ e } n = 3k \text{ para algum } k \text{ em } \mathbb{N}\}$
Conjunto dos números naturais divisíveis por 2 e por 3
Conjunto dos números naturais divisíveis por 6

(e) $\{w | w$ é uma string de `0`s e `1`s e w é igual ao reverso de $w\}$
Conjunto das sequências de `0`s e `1`s que são palíndromos

(f) $\{n | n \text{ é inteiro e } n = n + 1\}$
Conjunto dos números inteiros que são iguais ao seus sucessores

Questão 2 ....

Escreva descrições formais para os conjuntos a seguir:

(a) O conjunto contendo os números 1, 10, e 100
$\{1, 10, 100\}$

(b) O conjunto contendo todos os inteiros que são maiores do que 5
$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n > 5\}$ **ou** $\{6, 7, 8, 9, \ldots\}$

(c) O conjunto contendo todos os números naturais que são menores do que 5
$\{n \in \mathbb{N} \ : \ n < 5\}$ **ou** $\{1, 2, 3, 4\}$

(d) O conjunto contendo a string `aba`
$\{$`aba`$\}$

(e) O conjunto contendo a string vazia
$\{\varepsilon\}$

(f) O conjunto contendo absolutamente nada
$\{\}$ **ou** $\emptyset$

Questão 3

Seja A o conjunto $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ e B o conjunto $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

(a) A é subconjunto de B? ($A \subseteq B$?) **Não**

(b) B é subconjunto de A? ($B \subseteq A$?) **Sim**

(c) Quais elementos compõem $A \cup B$? $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$

(d) Quais elementos compõem $A \cap B$? $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$

(e) Quais elementos compõem $A \times B$? $\{(\mathtt{x}, \mathtt{x}), (\mathtt{x}, \mathtt{y}), (\mathtt{y}, \mathtt{x}), (\mathtt{y}, \mathtt{y}), (\mathtt{z}, \mathtt{x}), (\mathtt{z}, \mathtt{y})\}$

(f) Quais elementos compõem B^2? $\{(\mathtt{x}, \mathtt{x}), (\mathtt{x}, \mathtt{y}), (\mathtt{y}, \mathtt{x}), (\mathtt{y}, \mathtt{y})\}$

(g) Qual é o conjunto potência de B (2^B)? $\{\emptyset, \{\mathtt{x}\}, \{\mathtt{y}\}, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}\}$

Questão 4

Se A tem a elementos e B tem b elementos, quantos elementos tem $A \times B$? Explique sua resposta.

Resposta:

$A \times B$ possui $a \cdot b$ elementos. Note que todos os elementos de $A \times B$ são pares ordenados, tais que o primeiro elemento do par pertence a A (a possibilidades distintas) e o segundo elemento do par pertence a B (b possibilidades distintas). Pelo princípio multiplicativo, temos um total de $a \cdot b$ tais pares, todos os quais pertencem a $A \times B$, logo $|A \times B| = a \cdot b$.

Questão 5

Se C é um conjunto com c elementos, quantos elementos tem o conjunto potência de C? Explique sua resposta.

Resposta:

O conjunto potência de C possui 2^c elementos. Note que todos os elementos deste conjunto são subconjuntos de C, logo basta contar de quantas formas diferentes podemos "construir" um subconjunto de C. Cada elemento de c pode ser incluído ou não no subconjunto que estamos construindo; assim, temos c decisões a fazer, cada uma com 2 possíveis resultados, para um total de 2^c combinações de decisões. Como cada combinação resulta em um subconjunto diferente, e todos pertencem a $P(C)$, temos que $|P(C)| = 2^c$.

Questão 6

Seja X o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e Y o conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. A função unária $f : X \to Y$ e a função binária $g : X \times Y \to Y$ estão descritas nas tabelas a seguir.

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

(a) Quais são o domínio e contradomínio de f e g?
f: domínio X e contradomínio Y. g: domínio $X \times Y$ e contradomínio Y.

(b) Qual é o valor de $f(2)$? **7**

(c) Qual é o valor de $g(2, 10)$? **6**

(d) Qual é o valor de $g(4, f(4))$? $g(4, f(4)) = g(4, 7) = 8$

Questão 7 . . . .

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, e considere as relações de A sobre si mesmo listadas abaixo. Para cada uma, determine se ela é reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva. Determine também quais destas relações são, também, funções:

(a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
Reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva. É função.

(b) $R_2 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
Simétrica e antissimétrica, mas não reflexiva ou transitiva. É função.

(c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
Reflexiva, simétrica e transitiva, mas não antissimétrica. Não é função.

(d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
Antissimétrica, mas não reflexiva, simétrica ou transitiva. É função.

(e) $R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}$
Não é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva. Não é função.

Questão 8 . . . .

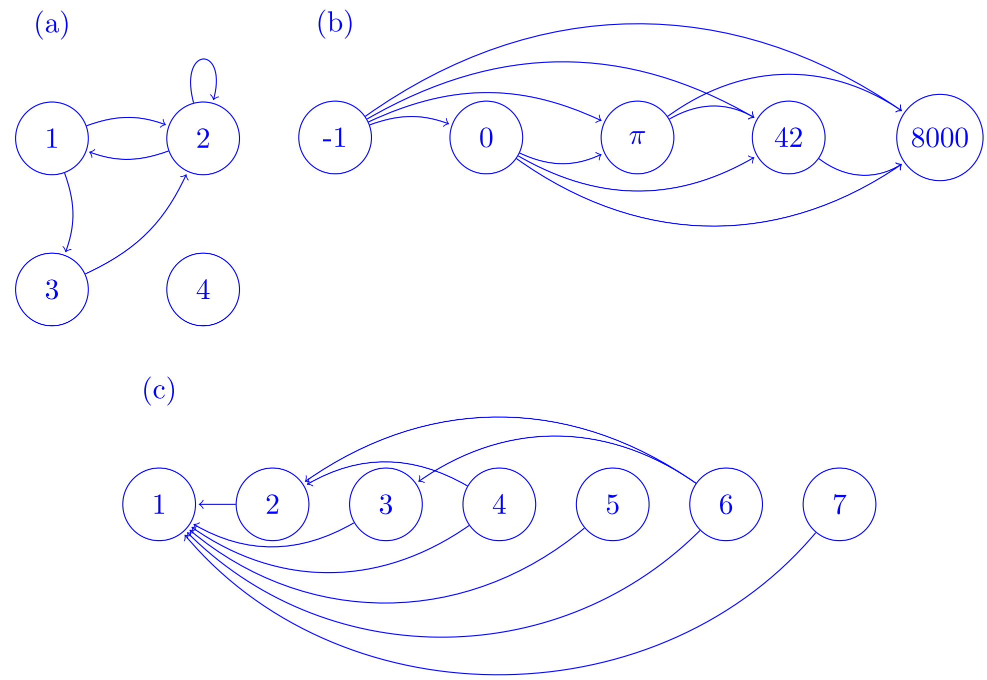
Represente cada uma das relações a seguir na forma de grafo:

(a) Relação $\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$, sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

(b) Relação $\leq$ sobre o conjunto $\{-1, 0, \pi, 42, 8000\}$

(c) Relação "é divisível por" sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Resposta:

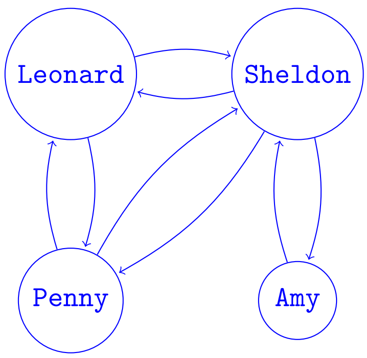


(d) Relação "moraram juntos em algum episódio na série The Big Bang Theory"[1] sobre o conjunto {`Leonard`, `Sheldon`, `Penny`, `Amy`}

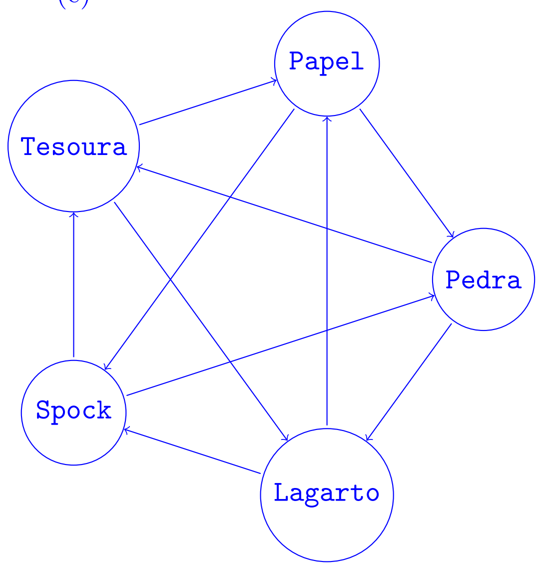
(e) Relação "ganha de" no jogo "pedra, papel, tesoura, lagarto, Spock", sobre o conjunto {`pedra`, `papel`, `tesoura`, `lagarto`, `Spock`}

Resposta:

(d)



(e)



(f) Outra relação de sua preferência

Questão 9 . . . .

Considere a representação de relações na forma de grafos. Descreva, de maneira informal, como determinar através desta representação se uma relação possui cada uma das seguintes propriedades: (i) reflexividade; (ii) simetria; (iii) antissimetria e (iv) transitividade.

Resposta:

Note que, na representação de relações como grafos, os nós do grafo são os elementos do conjunto em questão e as arestas (direcionadas) são os pares à relação. Em uma relação reflexiva, todo elemento está relacionado a ele mesmo, logo basta checar se todos os nós do grafo têm um laço, uma aresta que o liga a ele mesmo.
Uma relação simétrica, só podemos ter um par (a, b) se também tivermos o par (b, a), ou seja, para todas as arestas do grafo, a aresta reversa também deve estar presente. Similarmente, em uma relação antissimétrica, um par (a, b) (com $a \neq b$) não pode estar acompanhado do par (b, a), de forma que nunca temos duas arestas em sentidos opostos. Por fim, a propriedade mais complicada é a da transitividade. Ela significa que, sempre que dois pares (a, b) e (b, c) pertencerem à relação, o par (a, c) também irá pertencer. Os casos em que $a = b$ ou $b = c$ são sempre satisfeitos e não há o que verificar. Se a, b e c são vértices distintos, a restrição de transitividade significa que, quando houver um caminho de comprimento 2 entre a e c (através de b), também haverá a aresta (direta) entre a e c. Por fim, se $a = c$, a restrição agora significa que, sempre que houver duas arestas entre a e b, uma em cada sentido, também existirão laços em a e b. Se estes critérios forem satisfeitos no grafo inteiro, temos uma relação transitiva.

[1] Se você não conhece The Big Bang Theory, escolha sua série ou filme preferido =)

Teoria da Computação: Conceitos Básicos

Questão 10 ....

Considere os alfabetos $\Sigma_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$ e $\Sigma_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}\}$ e as sequências de símbolos $p_1 = \mathtt{arara}$, $p_2 = \mathtt{acabada}$ e $p_3 = \mathtt{rsrsrsrs}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

(a) p_1 é uma palavra sobre Σ_1 **(F)**

(b) p_2 é uma palavra sobre Σ_1 **(V)**

(c) $p_3 \in {\Sigma_2}^*$ **(V)**

(d) $\underbrace{\mathtt{rs}\ldots\mathtt{rs}}_{\text{4444 vezes}} \in {\Sigma_2}^*$ **(V)**

(e) $\mathtt{rsrsrsrs}\ldots \in {\Sigma_2}^*$ **(F)**

(f) $\varepsilon \in \Sigma_1$ **(F)**

(g) $\varepsilon \in {\Sigma_2}^*$ **(V)**

(h) $\emptyset \in \Sigma_1$ **(F)**

(i) $|p_2| = 7$ **(V)**

(j) $|\varepsilon| = 0$ **(V)**

(k) $\mathtt{ar}$ é prefixo de p_1 **(V)**

(l) $\mathtt{aba}$ é sufixo de p_2 **(F)**

(m) $\mathtt{acbda}$ é subpalavra de p_2 **(F)**

(n) $p_1 p_2 \in {\Sigma_1}^*$ **(F)**

(o) $\mathtt{ar} \cdot \mathtt{ara} = \mathtt{ar\ ara}$ **(F)**

(p) $p_1 p_2 = \mathtt{araraacabada}$ **(V)**

(q) $p_3 \varepsilon = p_3$ **(V)**

(r) $\mathtt{rs}^4 = p_3$ **(F)**

(s) $(\mathtt{rs})^4 = p_3$ **(V)**

(t) ${p_3}^3 = \mathtt{rsrsrsrsrsrsrsrsrsrsrsrs}$ **(V)**

(u) ${p_1}^R = p_1$ **(V)**

(v) $p_1 p_3 \in {\Sigma_1}^* \cdot {\Sigma_2}^*$ **(V)**

(w) $p_1 p_2 \in {\Sigma_2}^* \cdot {\Sigma_1}^*$ **(V)**

(x) $\mathtt{strada} \in {\Sigma_2}^* \cdot {\Sigma_1}^*$ **(V)**

(y) $\mathtt{arrasada} \in {\Sigma_1}^* \cdot {\Sigma_2}^*$ **(V)**

(z) $\mathtt{aaaaaaaaaaa} \in {\Sigma_1}^* \cap {\Sigma_2}^*$ **(V)**

Questão 11 ....

Sejam L_1 e L_2 duas linguagens sobre o alfabeto Σ. Determine as seguintes linguagens em função de ${L_1}^R$ e ${L_2}^R$:

(a) $(L_1 \cdot L_2)^R$

Resposta:

$(L_1 \cdot L_2)^R = {L_2}^R \cdot {L_1}^R$. Note que toda palavra de $L_1 \cdot L_2$ segue o formato $p_1 p_2$ com $p_1 \in L_1$ e $p_2 \in L_2$. A reversão destas palavras será dada por $(p_1 p_2)^R = {p_2}^R {p_1}^R$, o que significa que elas são formadas por uma palavra de ${L_2}^R$ concatenada com uma palavra de ${L_1}^R$.

(b) $(L_1 \cup L_2)^R$

Resposta:

$(L_1 \cup L_2)^R = {L_1}^R \cup {L_2}^R$. Uma palavra pertence a $L_1 \cup {L_2}^R$ se e somente se ela for o reverso de uma palavra de $L_1 \cup L_2$, logo ela deve ser o reverso de uma palavra de L_1 ou de uma palavra de L_2.

(c) $\overline{L_1}^R$

Resposta:

$\overline{L_1}^R = \overline{L_1^R}$. Note que qualquer palavra de $\overline{L_1}^R$ é o reverso de uma palavra que não pertence a L_1, logo ela é uma palavra que não pertence a $L_1{}^R$.

(d) $(L_1{}^*)^R$

Resposta:

$(L_1{}^*)^R = (L_1{}^R)^*$. Toda palavra de $L_1{}^*$ segue o formato $p_1p_2\ldots p_k$, onde toda palavra p_i pertence a L_1. Seus reversos seguirão o formato $(p_1p_2\ldots p_k)^R = p_k{}^R\ldots p_2{}^Rp_1{}^R$, logo serão sequências de palavras de $L_1{}^R$ concatenadas.

Questão 12 ....

Descreva formalmente a linguagem correspondente às strings que representam horas em formato numérico com hora, minuto e segundo (por exemplo: `21:25:20`). Apresente o alfabeto sobre o qual esta linguagem foi construída.

Resposta:

Para descrever esta linguagem, precisamos dos símbolos $\Sigma_H = \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2},\mathtt{3},\mathtt{4},\mathtt{5},\mathtt{6},\mathtt{7},\mathtt{8},\mathtt{9},\mathtt{:}\}$, que será o nosso alfabeto. Temos, então:

$$\begin{aligned} L_H = \{h_0h_1\mathtt{:}m_0m_1\mathtt{:}s_0s_1\ \ :\ & h_1, m_1, s_1 \in \Sigma \setminus \{\mathtt{:}\}, \\ & m_0, s_0 \in \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2},\mathtt{3},\mathtt{4},\mathtt{5}\}, \\ & h_0 \in \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}, h_0h_1 \notin \{\mathtt{24},\mathtt{25},\mathtt{26},\mathtt{27},\mathtt{28},\mathtt{29}\}\} \end{aligned}$$

Questão 13 ....

Descreva formalmente a linguagem formada pelos nomes de variáveis permitidos em Java.

Resposta:

$$\begin{aligned} \Sigma_J &= \{\mathtt{A},\mathtt{B},\ldots,\mathtt{Z},\mathtt{a},\mathtt{b},\ldots,\mathtt{z},\mathtt{0},\mathtt{1},\ldots,\mathtt{9}\} \\ L_J &= \{s\omega : \omega \in \Sigma_J{}^*, s \in \Sigma_J \setminus \{\mathtt{0},\ldots,\mathtt{9}\}\} \end{aligned}$$

Questão 14 ....

Descreva formalmente a linguagem correspondente aos palíndromosno alfabeto latino.

Resposta:

$$\begin{aligned} \Sigma_P &= \{\mathtt{a},\mathtt{b},\ldots,\mathtt{z}\} \\ L_P &= \{p : p = \omega\omega^R \text{ ou } p = \omega s \omega^R, \omega \in \Sigma_P{}^*, s \in \Sigma_P\} \\ &= \{p : p \in \Sigma_P{}^* \text{ e } p = p^R\} \end{aligned}$$