CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

ESCOLA DE MATEMÁTICA (EMAT)

UNIRIO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Curso: PROTES **Professor:** Helisson Coutinho

Disciplina: Matemática Básica **Tutoras:** Cinthia Monçores e Julia Lopes

LISTA DE EXERCÍCIOS - INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (GABARITO)

Exercício 1. João possui 22 reais e cada caixa de chocolate custa 5 reais. Qual é o número máximo de chocolates que ele pode comprar?

Solução:

Como a caixa de chocolate custa 5 reais, queremos saber a quantidade x que podemos comprar de modo que seja menor ou igual a 22 reais. Dessa forma:

$$5x \leq 22$$

$$\frac{5x}{5} \leq \frac{22}{5}$$

$$x \leq 4,4$$

Assim, podemos comprar menos de 4,4 caixas. Como não é possível comprar um número decimal de caixas, podemos trabalhar apenas com números naturais. Portanto, o máximo de caixas que podemos comprar é 4.

Exercício 2. Marcos possui 171 reais e cada carrinho custa 24 reais. Qual é o número máximo de carrinhos que ele pode comprar?

Solução:

Esta questão pode ser resolvida de forma semelhante à anterior. Como o carrinho custa 24 reais, queremos saber a quantidade máxima x que podemos comprar de modo que não ultrapasse o orçamente de Marcos, ou seja, o dinheiro que ele tem precisa ser maior ou igual a x vezes o preço do carrinho. Assim, temos:

$$171 \geq 24x$$

$$171 \cdot \frac{1}{24} \geq 24x \cdot \frac{1}{24}$$

$$7,1 \geq x$$

Logo, a quantidade de carrinhos precisa ser menor ou igual a 7,1, como não é possível comprar uma fração de carrinhos, podemos arredondar para o menor natural. Portanto, 7 carrinhos.

Exercício 3. Joao usa 2000 reais do seu salário para seus gastos fixos em cada mês. Ele deve guardar metade do dinheiro restante em uma aplicação financeira. Se todo mês ele pretende depositar pelo menos 5000 reais nessa aplicação, qual o valor mínimo do salário do João?

Solução:

Seja S o salário mensal de João (em reais).

O dinheiro restante após os gastos fixos é:

$$S - 2000$$

Ele deve guardar metade desse valor:

$$\frac{S - 2000}{2}$$

Como ele deseja guardar pelo menos 5000 reais, temos:

$$\frac{S - 2000}{2} \geq 5000$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$S - 2000 \geq 10000$$

Somando 2000 dos dois lados:

$$S \geq 12000$$

Portanto, o valor mínimo do salário de João é $\boxed{12000}$ reais.

Exercício 4. Determine o conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ das desigualdades $160 < 25x + 10$ e $3x + 6 < 81$.

Solução:

Precisamos operar as duas inequações de maneira que possamos encontrar um intervalo para x.

Em $160 < 25x + 10$, temos:

$$-10 + 160 < 25x + 10 - 10$$

$$150 < 25x$$

$$\frac{1}{25} \cdot 150 < 25x \cdot \frac{1}{25}$$

$$6 < x$$

Agora, resolvemos a segunda desigualdade $3x + 6 < 81$:

$$-6 + 3x + 6 < 81 - 6$$

$$3x < 75$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x < 75 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x < 25$$

Visualmente fica assim:

Portanto, o conjunto solução da inequação composta é:

$$6 < x < 25$$

Logo, a solução é o intervalo aberto:

$$\boxed{(6,\ 25)}$$

Exercício 5. Qual o menor número natural x que verifica as desigualdades $\frac{4x+2}{3}+x>\frac{2x+1}{2}+4$.

Solução:

Queremos encontrar o menor número natural x que verifica:

$$\frac{4x+2}{3}+x>\frac{2x+1}{2}+4$$

Primeiro, vamos eliminar os denominadores. O **mínimo múltiplo comum** entre 3 e 2 é 6. Multiplicamos toda a desigualdade por 6:

$$6\cdot\left(\frac{4x+2}{3}+x\right)>6\cdot\left(\frac{2x+1}{2}+4\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$2(4x+2)+6x>3(2x+1)+24$$

Resolvendo os parênteses:

$$8x+4+6x>6x+3+24$$

Somando os termos semelhantes:

$$14x+4>6x+27$$

Isolando o x:

$$-6x+14x+4>6x-6x+27$$

$$8x+4>27$$

$$-4+8x+4>27-4$$

$$8x>23$$

Dividindo ambos os lados por 8:

$$x>\frac{23}{8}$$

$$x>2{,}875$$

Como procuramos o menor número natural que satisfaz a desigualdade, o menor natural maior que 2,8 é 3.

Exercício 6. Resolva em $U = \mathbb{R}$ a desigualdade: $\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{2x+3}{5} > \dfrac{3x+2}{4}$

Solução:

Queremos resolver a desigualdade:

$$\frac{x+1}{3} + \frac{2x+3}{5} > \frac{3x+2}{4}$$

Primeiro, vamos eliminar os denominadores. O **mínimo múltiplo comum** entre 3, 5 e 4 é 60. Multiplicamos toda a desigualdade por 60:

$$60 \cdot \left(\frac{x+1}{3} + \frac{2x+3}{5}\right) > 60 \cdot \left(\frac{3x+2}{4}\right)$$

Aplicando a distributiva e simplificando os denominadores:

$$60 \cdot \left(\frac{x+1}{3}\right) = 20(x+1) = 20x + 20$$

$$60 \cdot \left(\frac{2x+3}{5}\right) = 12(2x+3) = 24x + 36$$

$$60 \cdot \left(\frac{3x+2}{4}\right) = 15(3x+2) = 45x + 30$$

Então, a desigualdade fica:

$$20x + 20 + 24x + 36 > 45x + 30$$

Somando os termos semelhantes do lado esquerdo:

$$(20x + 24x) + (20 + 36) > 45x + 30$$

$$44x + 56 > 45x + 30$$

Isolando os termos com x de um lado e os números do outro, fazemos:

$$-45x + 44x + 56 > 45x - 45x + 30$$

$$-x + 56 > 30$$

Agora isolamos x:

$$-56 - x + 56 > 30 - 56$$

$$-x > -26$$

Multiplicando ambos os lados por -1 e invertendo o sinal da desigualdade:

$$x < 26$$

Resposta:

$$\boxed{x < 26}$$

Exercício 7. Desafio.

Determine $U = \mathbb{R}$ o conjunto solução da desigualdade: $(x-1)(x+1)+(3x-1) > 6(x+2)+(2x+1)$

Solução:

Vamos expandir e simplificar cuidadosamente cada termo.

1. Expansão dos produtos:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$6(x+2)^2 = 6(x^2+4x+4) = 6x^2 + 24x + 24$$

—

2. Substituindo na desigualdade original:

$$(x^2-1) + (9x^2 - 6x + 1) > 6x^2 + 24x + 24 + 2x + 1$$

Somando os termos no lado esquerdo:

$$x^2 - 1 + 9x^2 - 6x + 1 = 10x^2 - 6x + (-1+1) = 10x^2 - 6x$$

Somando os termos no lado direito:

$$6x^2 + 24x + 24 + 2x + 1 = 6x^2 + (24x + 2x) + (24+1) = 6x^2 + 26x + 25$$

—

3. Agora, organizamos todos os termos para o lado esquerdo da desigualdade:

$$10x^2 - 6x > 6x^2 + 26x + 25$$

$$10x^2 - 6x - 6x^2 - 26x - 25 > 0$$

$$(10x^2 - 6x^2) + (-6x - 26x) - 25 > 0$$

$$4x^2 - 32x - 25 > 0$$

—

4. Resolver a inequação quadrática:

$$4x^2 - 32x - 25 > 0$$

Para isso, calculamos o discriminante:

$$\Delta = (-32)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-25) = 1024 + 400 = 1424$$

Calculando as raízes:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1424}}{2 \cdot 4} = \frac{32 \pm \sqrt{1424}}{8}$$

Note que:

$$\sqrt{1424} = \sqrt{16 \times 89} = 4\sqrt{89}$$

Então:

$$x = \frac{32 \pm 4\sqrt{89}}{8} = 4 \pm \frac{\sqrt{89}}{2}$$

—

5. Como o coeficiente de x^2 é positivo (4), a parábola abre para cima, e a solução da desigualdade é:

$$x < 4 - \frac{\sqrt{89}}{2} \quad \text{ou} \quad x > 4 + \frac{\sqrt{89}}{2}$$

—

Resposta final:

$$\boxed{\left(-\infty, 4 - \frac{\sqrt{89}}{2}\right) \cup \left(4 + \frac{\sqrt{89}}{2}, +\infty\right)}$$