Demonstração ilustrada da Proposição 2 da Aula 20

Este texto apresenta a mesma prova do módulo com a inclusão de figuras e deste aplicativo para facilitar a visualização.

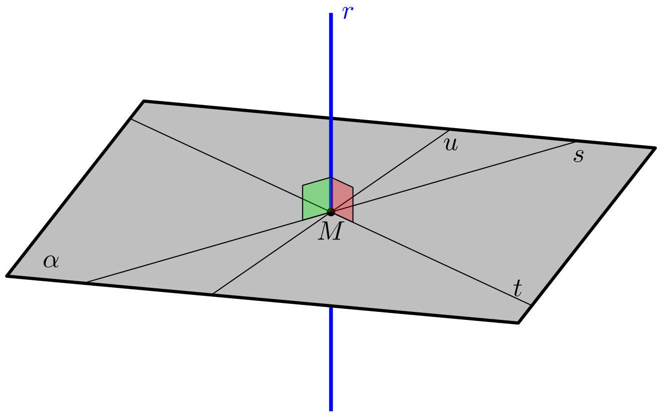
Proposição 2: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então a reta é perpendicular ao plano.

Importante lembrar que:

- (definição) Duas retas são chamadas de perpendiculares quando o ângulo entre elas é de 90°. Aqui também usamos a palavra perpendiculares para retas reversas que fazem entre si ângulos de 90°.
- (definição) Uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as retas desse plano.
- (lema) Um triângulo ABC é isósceles de base BC se, e somente se, a mediana e a altura relativas ao lado BC coincidem.

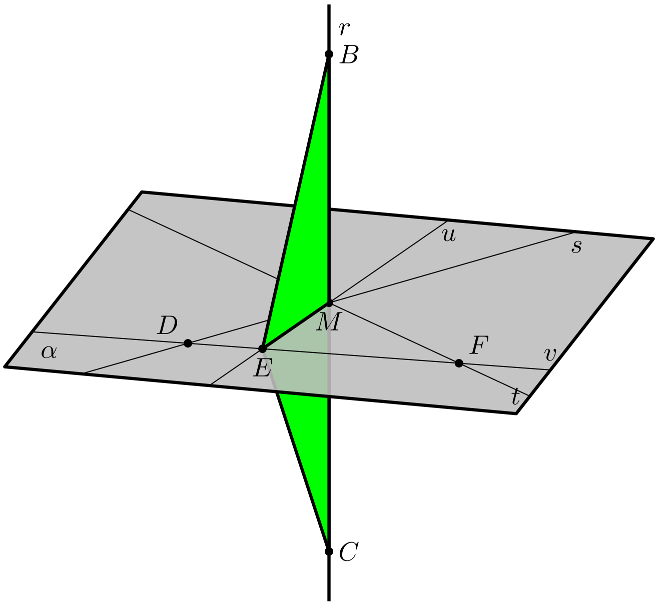
Além dos casos de congruência de triângulos LLL e LAL, são usadas as duas implicações do lema enunciado.

Demonstração da Proposição 2: Sejam s e t retas concorrentes do plano α no ponto M e seja r uma reta perpendicular a s e a t por M. Seja $u \subset \alpha$ uma reta que passe por M. Vamos mostrar que u e r são perpendiculares. Este é um caso particular, mas o caso geral é obtido deste de maneira simples.



Passo 0. Definições preliminares e estabelecimento de uma estratégia.

Sejam B e C pontos de reta r tais que M é o ponto médio de BC (por isso usamos o rótulo M). Seja também a reta v concorrente com s, u e t nos pontos distintos D, E e F, respectivamente, de modo que E pertence ao segmento DF (figura a seguir).

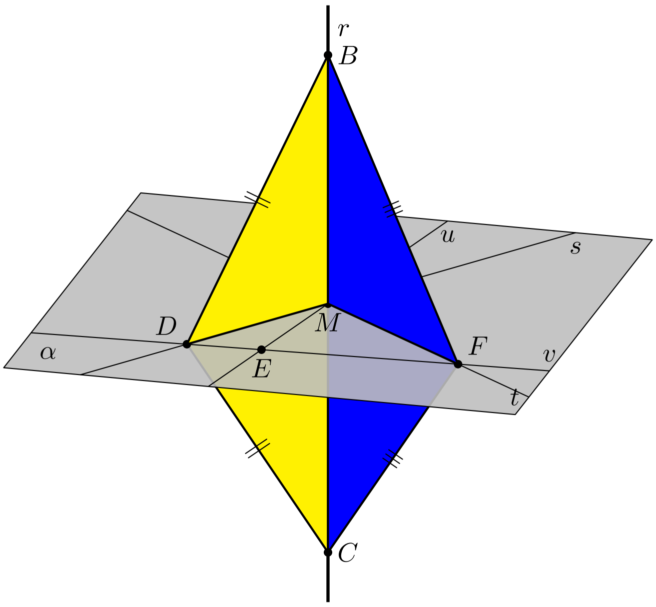


A estratégia adotada.

O plano é mostrar que o triângulo EBC é isósceles de base BC, porque sabemos que, neste caso, a mediana EM também é altura, logo BC é perpendicular a EM, ou seja, r é perpendicular a u, exatamente o que pretendemos mostrar.

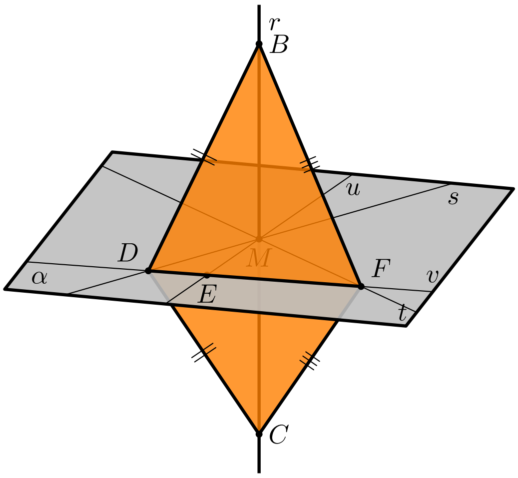
Passo 1. Os triângulos DBC e FBC são isósceles de base BC.

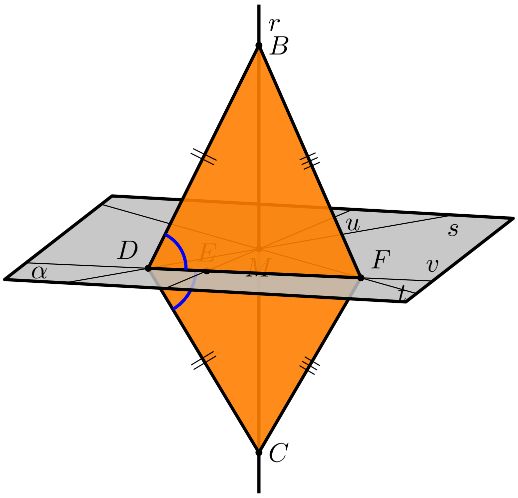
Observe os triângulos DBC e FBC. Como as retas s e t são perpendiculares a r, as medinas DM e FM também são alturas nesses triângulos, logo DBC e FBC são triângulos isósceles de base BC (Lema).



Passo 2. Os ângulos $\widehat{BDF}$ e $\widehat{CDF}$ são iguais.

Como os triângulos DBC e FBC são isósceles de base BC, os triângulos BDF e CDF são congruentes, por lado-lado-lado. Dessa congruência, obtemos que os ângulos $\widehat{BDF}$ e $\widehat{CDF}$ são iguais.





Passo 3. Os triângulos BCE e CDE são congruentes, por LAL.

Perceba que essa igualdade de ângulos resolve o problema porque os triângulos BDE e CDE são congruentes por lado-ângulo-lado. De onde obtemos que $BE = CE$, logo EBC é isósceles de base BC, o que implica que a mediana EM também é altura relativa à base BC. Portanto, r é perpendicular a u, conforme queríamos demonstrar.