Livro Aberto de Matemática

Coleção do Ensino Médio

Geometria

Associação Livro Aberto

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Sumário

Projeto: Livro Aberto de Matemática

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

livroaberto

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP

Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título:	Geometria Espacial
Ano/ Versão:	2023 / versão de 6 de abril de 2023
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autor (a)	Augusto Quadros Teixeira (IMPA), Fabio Luiz Borges Simas (UNIRIO), Jose Ezequiel Soto Sanchez e Letícia Rangel (CAp UFRJ)
Revisão:	
Design:	Enzo Esberard
Diagramação:	Tarso Boudet Caldas

Desenvolvido por

Licença:

Patrocínio:

Itaú Social

Para o professor: Esfera

Esta seção apresenta a definição de esfera e as posições relativas de uma esfera e um plano no espaço. As coordenadas esféricas (sem usar esse nome) são introduzidas para localizar pontos na esfera. A linguagem da Geometria Espacial estudada na Seção 1.2 será especialmente necessária na introdução dessas coordenadas. Cabe ressaltar que esse assunto será retomado com outro enfoque no capítulo Projeções Cartográficas, ainda neste volume. Outro aspecto destacado nas atividades e exercícios é a distância de pontos e comprimentos de arcos na esfera.

Na Seção Organizando 5 é provado que a interseção de uma esfera com um plano é uma circunferência. A demonstração é um alvo de oportunidade e pode ser omitida. Mas repare que na justificativa de que a interseção está contida em uma circunferência, calcula-se o raio dessa circunferência. Esse cálculo é simples e será necessária na Atividade 19 e nos exercícios.

Os principais objetivos específicos tratados nesta seção são:

- Reconhecer coordenadas esféricas na prática.
- Determinar comprimentos de arco na esfera.
- Entender que a interseção de uma esfera com um plano é o conjunto vazio, um ponto ou uma circunferência.
- Determinar o raio da circunferência determinada por plano secante à esfera.

1.5 Esfera

Explorando — Esfera

Atividade 18

Interseção de plano e esfera

A imagem da esquerda na Figura 1.84 ilustra uma esfera de raio unitário e centro O. Considere N e S pontos diametralmente opostos na esfera. Sejam α o plano perpendicular ao segmento NS que passa pelo centro O e A um ponto da interseção da esfera com o plano α. O plano β é paralelo ao plano α e sua interseção com a esfera é uma circunferência c de centro O'. Chame de A' o ponto de interseção de c com o plano determinado por N, S e A. O ponto B de c é tal que $\widehat{A'O'B} = 90°$ (imagem da direita na Figura 1.84).

Figura 1.84: Localização e distância entre pontos na esfera

Fonte: Elaborada pelos autores

a) Calcule o raio de c, caso $OO' = 0{,}5$.

b) Calcule o raio de c, caso o ângulo $\widehat{AOA'}$ meça $60°$.

c) Calcule o comprimento do segmento $A'B$ nos casos considerados nos itens a) e b).

Organizando — Esfera

Dados um ponto O do espaço e um número $r > 0$, a *esfera de centro O e raio r* é o conjunto dos pontos do espaço que estão à mesma distância r de O. Repare que trocando "espaço" por "plano" na frase anterior obtém-se a definição de circunferência no plano.

Posições relativas de um plano e uma esfera

Lembre-se que escolhidos um ponto P e um plano α no espaço, a distância de P a α é o comprimento do segmento que liga o ponto ao plano e é perpendicular ao plano. Dito de outra forma, $d(P;\alpha) = PP'$ em que P' é o ponto de α mais próximo de P (veja a Figura 1.85), pois se Q é qualquer outro ponto de α, então PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo $PP'Q$, logo $PQ > PP'$. Tenha isso em mente ao ler esta subseção.

Objetivos Específicos

Interseção de plano e esfera

- Reconhecer coordenadas esféricas.
- Determinar comprimentos de arcos de circunferências na esfera.

Sugestões e discussões

Os estudantes podem encontrar dificuldade para identificar os triângulos adequados aos cálculos nos itens da atividade. Considere auxiliá-los na visualização e organização do item a).

Solução

a) O triângulo $A'OO'$ é reto em O' como mostra a Figura 1.12

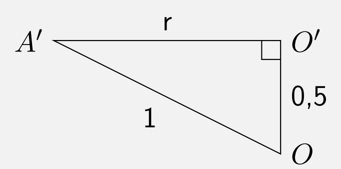


Figura 1.12: triângulo $A'OO'$

Assim,

$$r^2 + 0,5^2 = 1^2 \Rightarrow r^2 = 1 - 0,25 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Portanto, $r = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Como $\widehat{AOA'} = 60°$ o ângulo $\widehat{A'OO'} = 30°$, pois são complementares. Portanto, o triângulo $A'OO'$ fica como mostra a Figura 1.13

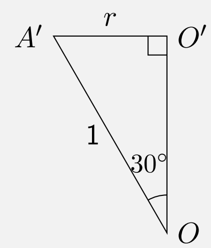


Figura 1.13: Triângulo $A'OO'$

Assim, $r = 1 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}$.

c) Como o ângulo $\widehat{A'O'B} = 90°$, em ambos os casos, o comprimento do arco $A'B$ é $1/4$ $(90°/360°)$ do comprimento de c. Assim,

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Comprimento}_{A'B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.$$

Por outro lado,

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Comprimento}_{A'B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

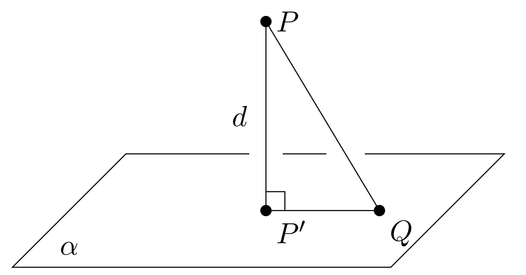
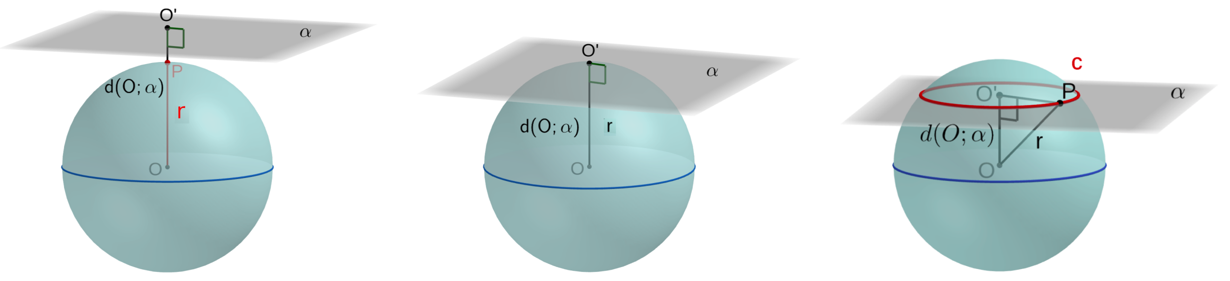


Figura 1.85: O ponto $P' \in \alpha$ tal que $d(P;\alpha) = PP'$ é o ponto de α mais próximo de P

Fonte: Elaborada pelos autores

Dados um plano α e uma esfera de centro O e raio r no espaço, existem três possibilidades para a interseção de α com a esfera (Figura 1.86):

- Vazio. Se $d(O;\alpha) > r$, então todos os pontos de α são externos à esfera pois distam mais que r de O. Neste caso diz-se que *o plano é externo à esfera*.
- Exatamente um ponto. Se $d(O;\alpha) = r$, então apenas o ponto $T \in \alpha$ tal que $TO = d(O;\alpha) = r$ pertence à esfera, todos os demais distam mais que r de O. Neste caso, diz-se que *a esfera e o plano são tangentes* nesse ponto.
- Uma circunferência. Se $d(O;\alpha) < r$, então a interseção da esfera com o plano é uma circunferência (c na imagem da direita na Figura 1.86). Isso porque todos os pontos P da interseção estão à mesma distância do ponto $O' \in \alpha$ que realiza a distância de O para α, veja mais detalhes na observação a seguir. Neste caso, diz-se que *a esfera e o plano são secantes*.



Plano externo à esfera | Plano tangente à esfera | Plano secante à esfera

Figura 1.86: Posições relativas de um plano e uma esfera

Fonte: Elaborada pelos autores

Interseção da esfera com um plano secante — Observação

Parte da justificativa da afirmação a seguir é a conta que você fez na Atividade 18.

Afirmação: Se a distância d do plano α ao centro O da esfera s é menor do que o raio r da esfera, então a interseção $\alpha \cap s$ é uma circunferência de raio $\sqrt{r^2 - d^2}$ contida em α.

Justificativa: Chame de O' o ponto de α tal que $OO' = d(O;\alpha) = d$. Suponha que $O' \neq O$, o outro caso é ainda mais simples. Qualquer ponto P da interseção de α com a esfera s forma um triângulo retângulo $OO'P$ (veja a Figura 1.87). Como $O'O = d$ e $OP = r$ (pois $P \in s$), o Teorema de Pitágoras nos garante que $O'P^2 + O'O^2 = OP^2$, logo $O'P = \sqrt{OP^2 - O'O^2} = \sqrt{r^2 - d^2}$. Isto é, o ponto P pertence à circunferência c contida em α que tem centro O' e raio $\sqrt{r^2 - d^2}$. Com isso justificamos que os pontos da interseção $\alpha \cap s$ estão contidos nessa circunferência c de α.

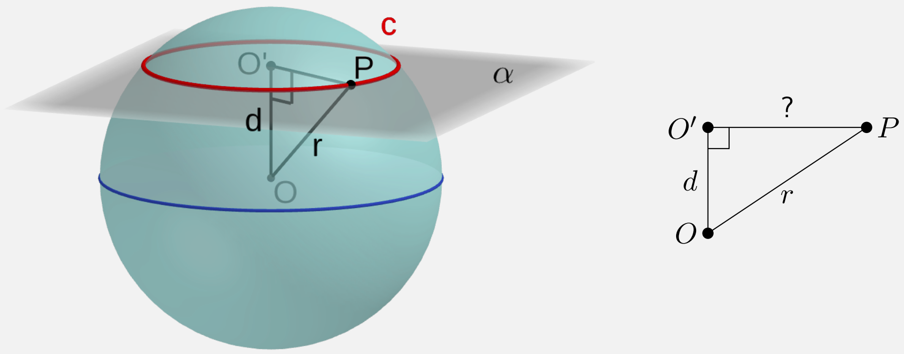


Figura 1.87: Se $P \in \alpha \cap s$, então $O'P = \sqrt{r^2 - d^2}$. Isto é, $P \in c$

Fonte: Elaborada pelos autores

Falta mostrar que todos os pontos da circunferência c estão na esfera. Se $Q \in c$, então $Q \in \alpha$ pois c é uma circunferência de α. Além disso, a distância $O'Q$ é o raio de c, isto é, $O'Q = \sqrt{r^2 - d^2}$. Como o triângulo retângulo $OO'Q$ tem catetos d e $\sqrt{r^2 - d^2}$ (Figura 1.88), usando o Teorema de Pitágoras mostra-se que a hipotenusa OQ mede r.

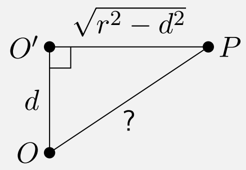


Figura 1.88: A circunferência c está contida na interseção da esfera com o plano α

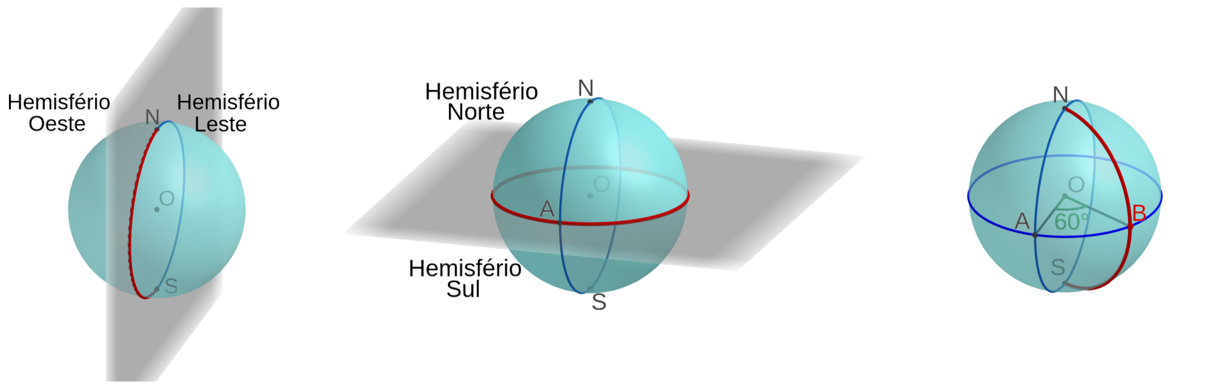
Elaborada pelos autores

Isto é, o ponto Q pertence à esfera s. Portanto, qualquer ponto da circunferência c de α pertence à esfera s. Com isso concluímos que $c = \alpha \cap s$.

Repare que esta justificativa mostra uma igualdade de conjuntos, isto é, que os conjuntos têm exatamente os mesmos elementos. Isso foi feito em duas partes: (i) $\alpha \cap S \subset c$ e (ii) $c \subset \alpha \cap s$.

Localização de pontos na esfera

A linguagem introduzida a seguir é comum para localizar pontos na esfera e é usada em exercícios. É a mesma ideia usada para representar a localização de pontos no globo terrestre (essas noções serão revisitadas e aprofundadas no capítulo Projeções Cartográficas deste volume).



Meridiano de $0°$ Linha do Equador Meridiano $60°$ Leste

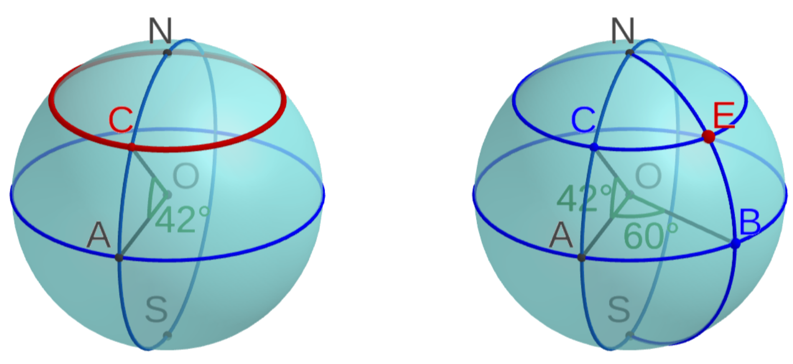
Figura 1.89: Meridianos e a Linha do Equador

Elaborada pelos autores

Escolha dois pontos diametralmente opostos na esfera, digamos N e S, são os polos Norte e Sul, respectivamente. Cada um dos (infinitos) planos que contêm o segmento NS intersecta a esfera em uma circunferência de raio r, que divide a esfera em dois hemisférios. Escolha uma dessas circunferências, essa escolha é arbitrária, qualquer uma serve, mas uma vez escolhida a circunferência, ela deve ser mantida daqui para frente. No caso do globo terrestre, a escolhida é a circunferência que contém o meridiano de *Greenwich*. Um dos hemisférios assim determinados é chamado de *hemisfério leste* e o outro de *oeste* (veja a Figura 1.89). Cada semicircunferência de extremos N e S é chamado de *meridiano*. Uma das semicircunferências daquela circunferência escolhida é chamada de meridiano de zero grau $(0°)$.

Chame de α o plano que é perpendicular à reta NS e que passa pelo ponto médio (centro O da esfera) desse segmento (Figura 1.89). O plano α determina na esfera um círculo de raio r chamado de *linha do Equador*. O plano α também dá origem a dois hemisférios. O que contém o polo norte é chamado de *hemisfério norte*, o que contém o polo sul é o *hemisfério sul*. Chame de A o ponto de encontro da linha do Equador com o meridiano de $0°$. Dado qualquer outro ponto B sobre a linha do Equador, os pontos não colineares N, S e B determinam um único meridiano que passa por B. Esse meridiano é identificado pelo ângulo $\widehat{AOB}$ e pelo hemisfério em que está contido: Leste ou Oeste. Repare que os meridianos $180°$ Leste e $180°$ Oeste são iguais.

As circunferências formadas nas interseções de planos paralelos a α com a esfera são chamadas de *paralelos*. A identificação dos paralelos também se dá pela indicação de um ângulo e do hemisfério em que ele está contido. Seja c o ponto de interseção de um paralelo com o meridiano de zero grau. Esse paralelo é identificado com o ângulo $\widehat{AOC}$ seguido do hemisfério em que está contido (veja na Figura 1.90). Assim, a linha do Equador é o paralelo de zero grau, este é um paralelo especial, não tem indicação de hemisfério norte ou sul.



Paralelo $42°$ Norte Ponto E na posição $42°$ Norte e $60°$ Leste

Figura 1.90: Exemplo de paralelo e localização de um ponto na esfera

Fonte: Elaborada pelos autores

Finalmente, qualquer ponto na esfera é o polo norte, o polo sul ou é a interseção de um paralelo com um meridiano e assim pode ser identificado por essas informações, como no exemplo da Figura 1.90.

Para refletir

Assim como a circunferência faz no plano, a esfera separa o espaço em três conjuntos: o interior da esfera, o exterior da esfera e a esfera. Dizemos que um conjunto de pontos do espaço é *limitado* quando está contido na região interior de alguma esfera (quando *existe* uma esfera que tem o conjunto em sua região interior). Caso contrário, dizemos que o conjunto é *ilimitado*, isto é, quando nenhum esfera contém esse conjunto em seu interior. Por exemplo, as retas e planos são conjuntos ilimitados do espaço. Por outro lado, um segmento de reta, um polígono e uma pirâmide são exemplos conjuntos limitados do espaço.

É comum as pessoas usarem a palavra *infinito* querendo dizer *ilimitado*. Repare que um triângulo tem infinitos pontos, mas é limitado. Por outro lado, pode-se mostrar que os conjuntos ilimitados sempre são infinitos. Tente justificar que os conjuntos finitos são limitados. As duas afirmações são equivalentes.

Praticando — Esfera

Atividade 19

Caminhos na Esfera

A Figura 1.91 representa um planeta fictício de forma esférica, com centro O e raio $6000\,\mathrm{Km}$. A imagem da esquerda destaca os pontos A e B, ambos localizados no paralelo $30°$ Norte. Sabendo que A está no meridianos de zero grau e B no meridiano $90°$ Leste, resolva:

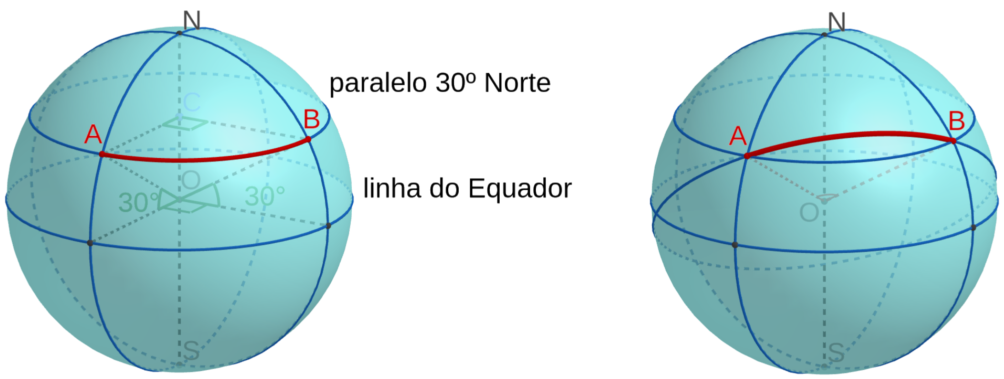


Figura 1.91: Caminhos num planeta fictício

Fonte: Elaborada pelos autores

a) Calcule o raio do paralelo $30°$ Norte.

b) Calcule o comprimento do arco AB sobre o paralelo $30°$ Norte destacado na imagem da esquerda.

c) Calcule o comprimento do arco AB sobre o círculo de centro O no plano OAB destacado na imagem da direita. **Sugestão:** calcule primeiro o comprimento do segmento AB, depois o cosseno do ângulo $\widehat{AOB}$ usando a Lei dos Cossenos e obtenha uma aproximação do ângulo usando uma calculadora científica.

Objetivos Específicos

Caminhos na Esfera

- Reconhecer coordenadas esféricas na prática.
- Calcular comprimentos de arco na esfera.

Sugestões e discussões

A atividade dos estudantes ocorre em três frentes (i) na visualização espacial, (ii) na leitura da linguagem das coordenadas na esfera, e (iii) na geometria plana.

Ajude os estudantes no item (iii), eles podem precisar de uma ajuda para lembrar resultados da geometria plana e para usar a calculadora científica no item c). Mas tome cuidado para não ajudar demais nas partes (i) e (ii). O esforço aqui leva ao aprendizado.

Seguindo a sugestão no item c), o estudante deve encontrar o cosseno do ângulo usando a Lei dos Cossenos e depois precisa do valor do ângulo em si. Para isso, recomenda-se o uso da função arco (acos cosseno) em uma calculadora científica.

Solução

a) Seja c o centro do paralelo $30°$ N. O triângulo AOC fica como na Figura 1.14.

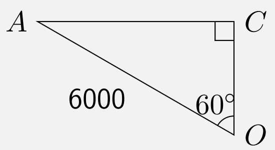


Figura 1.14: triângulo AOC

Portanto,

$$AC = AO \sin 60^\circ = 3000\sqrt{3} \approx 5196{,}15\,\text{Km}.$$

b) Como o ângulo $\widehat{ACB} = 90^\circ$, o arco AB destacado é um quarto do comprimento do paralelo. Assim

$$\frac{2\pi AC}{4} = 1500\pi\sqrt{3} \approx 8162{,}1\,\text{Km}.$$

c) A estratégia aqui, seguindo a sugestão, é calcular o ângulo $\widehat{AOB}$ já que a razão do arco AB com a circunferência completa coincide com a razão do ângulo com 360°.

Para calcular o ângulo usamos a Lei dos Cossenos no triângulo AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\theta. \quad (1.4)$$

Para determinar a distância AB, pode-se usar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, em que $CA = CB = 3000\sqrt{3}$, calculado no item a). Portanto, $AB = 3000\sqrt{6} \approx 7348{,}5\,\text{Km}$. Substituindo os valores na Equação (1.4), calcula-se $\cos\theta = 0{,}25$ e usando a calculadora científica obtém-se $\theta \approx 75,5^\circ$. Assim,

$$\frac{\text{arco}(AB)}{2\pi 6000} = \frac{75{,}5^\circ}{360^\circ},$$

portanto, o arco AB mede $7906{,}3\,\text{Km}$.

Para refletir

Quando um objeto se desloca sobre uma esfera, a menor distância para se ir de um ponto A a um ponto B não é mais dada pelo segmento de reta que liga esses pontos, mas sim por um arco de circunferência, como experimentado na Atividade 19. Ocorre que existem infinitos arcos de circunferência ligando dois pontos na esfera.

Qual deles oferece a menor distância entre os pontos A e B?

Na atividade você deve ter percebido que o percurso sobre o paralelo 30° Norte é maior que o percurso pelo arco de raio máximo, contido na circunferência do plano AOB.

Embora não tenha sido justificado aqui, a verdade é que dados dois pontos na esfera, o menor caminho que os liga é sempre um arco de circunferência que tem o mesmo raio da esfera. Isso será retomado no capítulo de Projeções Cartográficas, deste volume.

Exercícios

1. (Fuvest-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm, é

   a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* 5

2. (UFPE) Uma esfera de centro O e raio igual a 5 cm é cortada por um plano α, resultando dessa interseção um círculo de raio igual a 4 cm. Assinale, então, a alternativa que fornece a distância de O a α.

   a) 10 cm *b)* 5 cm *c)* 2 cm *d)* 1 cm *e)* 3 cm

3. (UNESP - Adaptada) Observe a Figura 1.92 da representação dos pontos M e N sobre a superfície da Terra. Considerando a Terra uma esfera de raio 6400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto M ao ponto N, pela superfície da Terra, a distância percorrida sobre o paralelo 60° Norte será igual a

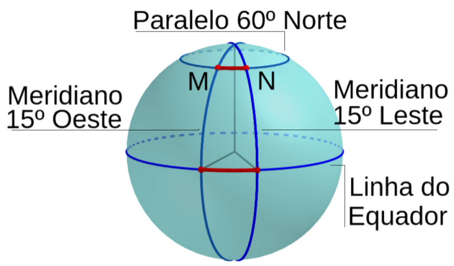


Figura 1.92: Distância sobre a esfera

Fonte: Adaptada pelos autores de UNESP

   a) 2100 km *b)* 1600 km *c)* 2700 km *d)* 1800 km *e)* 1200 km

4. (UNESP) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6300 km, a medida do menor arco PQ sobre a linha do paralelo $30° \, N$ é, em quilômetros, igual a

a) $1150\pi\sqrt{3}$ *b)* $1250\pi\sqrt{3}$ *c)* $1050\pi\sqrt{3}$ *d)* $1320\pi\sqrt{3}$ *e)* $1350\pi\sqrt{3}$

Solução dos exercícios

1. Seja O o centro da esfera, O' o centro da circunferência determinada pelo plano de interseção com a mesma e P um ponto de interseção da esfera com esse plano. Sabemos que $OO' = 12\,\text{cm}$, $OP = 13\,\text{cm}$ (raio da esfera) e queremos determinar o comprimento do segmento $O'P = r$ (raio da circunferência). O triângulo $OO'P$ é reto em O' como mostra a Figura 1.93

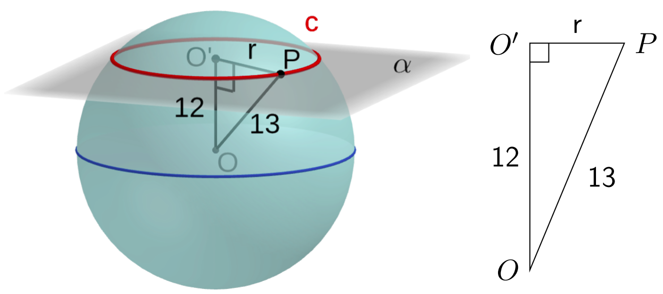


Figura 1.93: Triângulo $OO'P$

Elaborada pelos autores

Portanto,

$$OP^2 = O'P^2 + O'O^2 \Rightarrow 13^2 = r^2 + 12^2 \Rightarrow r^2 = 169 - 144 = 25.$$

Assim, $r = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}.$

2. Seja O' o centro da circunferência determinada pelo plano α e P um ponto de interseção da esfera com esse plano. Sabemos que $O'P = 4\,\text{cm}$ (raio da circunferência), $OP = 5\,\text{cm}$ (raio da esfera) e queremos determinar o comprimento do segmento $OO' = d$ (distância entre o centro da esfera e o plano α). O triângulo $OO'P$ é reto em O' como mostra a Figura 1.94

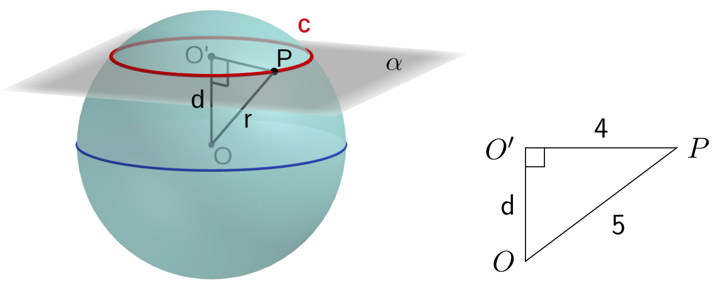


Figura 1.94: Triângulo $OO'P$

Elaborada pelos autores

Portanto,

$$OP^2 = O'O^2 + O'P^2 \Rightarrow 5^2 = d^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 = 25 - 16 = 9.$$

Assim,

$$r = \sqrt{9} = 3\,\text{cm}.$$

3. Seja O o centro da esfera, O' o centro do paralelo $60°$ Norte e $O'M = r$ o raio dessa circunferência. Sabemos que o triângulo $OO'M$ é reto em O' e que $O'\hat{O}M = 30°$, como mostra a Figura 1.95

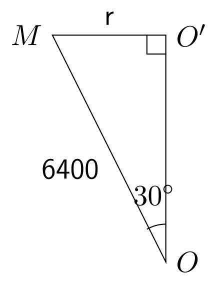


Figura 1.95: Triângulo $O'OM$

Elaborada pelos autores

Portanto,

$$O'M = OM \cdot \sin 30° \Rightarrow r = 6400 \cdot \frac{1}{2} = 3200.$$

Como o ângulo $\widehat{MO'N} = 30°$, o arco MN destacado corresponde à fração $30°/360°$ do comprimento do paralelo. Assim

$$\frac{30°}{360°} \cdot 2\pi \cdot O'M = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3200}{12} = 1600\,\mathrm{Km}.$$

4. Seja O o centro da esfera, O' o centro do paralelo $30°$ Norte e $O'P = r$ o raio dessa circunferência. Sabemos que o triângulo $OO'P$ é reto em O' e que $O'\hat{O}P = 60°$, como mostra a Figura 1.96

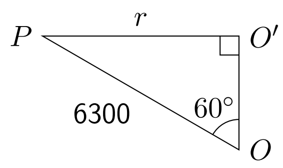


Figura 1.96: Triângulo $OO'P$

Elaborada pelos autores

Portanto,

$$O'P = OP \cdot \operatorname{sen} 60° \Rightarrow r = 6300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3150\sqrt{3}.$$

Como o ângulo $\widehat{PO'Q} = 60°$, o arco PQ corresponde à fração $60°/360°$ do comprimento do paralelo. Assim

$$\frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot O'P = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3150\sqrt{3}}{6} = 1050\pi\sqrt{3}\mathrm{Km}.$$