Geometria Espacial - EP 13 - Gabarito

Exercício 1. Uma ampulheta é formada por dois cones retos iguais, com eixos verticais e justapostos pelo vértice, o qual tem um pequeno orifício que permite a passagem de areia da parte de cima para a parte de baixo. Ao ser colocada para marcar um intervalo de tempo, toda a areia está na parte de cima e, 2 minutos e 10 segundos depois, a altura da areia na parte de cima reduziu-se à um terço. Supondo que em cada segundo a quantidade de areia que passa do cone de cima para o cone de baixo é constante, em quanto tempo mais toda a areia terá passado para a parte de baixo?

Solução:

Se a altura após decorridos 2 minuto e 10 segundos reduziu para um terço da altura original, então o volume de areia que falta passar é o volume do cone semelhante ao original com razão de semelhança $\frac{1}{3}$. Sendo assim, o volume do que falta passar é $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ do total. Como a quantidade de areia que passa por segundo é constante, uma regra de três resolve o problema. Vinte e seis partes passaram em 130 segundos, uma parte passará em $130/26 = 5$ segundos.

Exercício 2. Considere um tetraedro $D - ABC$ tal que:

(i) DA é perpendicular ao plano ABC.

(ii) $DA = 1$.

(iii) Os ângulos das faces laterais no vértice D são todos iguais a $45°$.

Então o volume da pirâmide é:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

e) N.R.A.

Solução:

Os triângulos DAB e DAC são retângulos e têm um ângulo de $45°$, logo são isósceles e $AC = AB = 1$. Usando o Teorema de Pitágoras nesses dois triângulos obtém-se que $DB = DC = \sqrt{2}$. Lembre-se que o ângulo $\widehat{BDC} = 45°$. Portanto, usando o Teorema dos Cossenos no triângulo DBC obtém-se o comprimento de BC.

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 45° \Rightarrow BC = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Usando a Fórmula de Heron pode-se calcular a área do triângulo ABC. Seja p o semiperímetro de ABC.

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Sabe-se que $p = 1 + \dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$. Fazendo as contas obtém-se Área$(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$. Logo o volume da pirâmide é $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ pois a altura relativa à ABC é $AD = 1$.

Exercício 3. A que altura h' do vértice devemos cortar uma pirâmide de base $\mathcal{P}$ e altura h por um plano paralelo à base para obtermos dois sólidos de mesmo volume?

Solução:

Sejam $\mathcal{P}$ o polígono que é base da pirâmide original e $\mathcal{P}'$ a base da pirâmide formada pela seção. Conforme justificado na demonstração da fórmula de cálculo para o volume de uma pirâmide, $\mathcal{P}'$ é semelhante a $\mathcal{P}$ com razão de semelhança h/h', onde h é a altura da pirâmide original e h' é a altura da nova pirâmide. Portanto,

$$\frac{\text{Area}(\mathcal{P}')}{\text{Area}(\mathcal{P})} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Finalmente, se a razão entre os volumes das pirâmides é de 1 para 2, então temos

$$\frac{\frac{1}{3}\text{Area}(\mathcal{P}')\cdot h'}{\frac{1}{3}\text{Area}(\mathcal{P})\cdot h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\text{Area}(\mathcal{P}')\cdot h'}{\text{Area}(\mathcal{P})\cdot h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow h' = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$$

Exercício 4. Utilize o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de uma esfera de raio R.

Solução:

Veja o Módulo de Geometria Básica, volume 2, página 180, na aula 29. Recomendamos também as Aulas 38 e 39 do Portal da Matemática:

- Problema: Volume da anticlépsidra. `https://www.youtube.com/watch?v=NeWOZGSrNME`
- Volume da esfera. `https://www.youtube.com/watch?v=AqNwkiAwOKk`

Exercício 5. Calcule o tempo que levará para encher um recipiente de 214 litros, sabendo que a velocidade de escoamento do líquido é de $0,3m/s$ e que o diâmetro do tubo cilíndrico conectado ao recipiente é igual a 30mm.

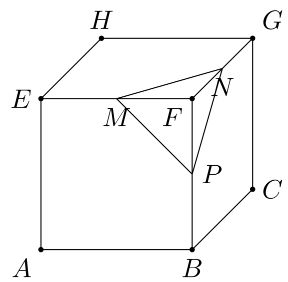
Solução:

Sabemos a velocidade de escoamento do líquido, mas se soubéssemos a vazão do líquido (litros por segundo) conseguiríamos resolver o problema. Para conhecermos a vazão do líquido no tudo, precisamos calcular o volume de 0,3 metro deste tubo porque esta é a quantidade de líquido que sai do tubo por segundo. O volume do cilindro circular reto de altura 0,3 metro e diâmetro 30mm é

$$V = A_b \cdot h = \pi(15\cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,3 \approx 211,9510^{-6}m^3 \approx 0,21L.$$

Portanto a vazão é de aproximadamente 0,21 litro por segundo, então para encher 214 litros serão gastos aproximadamente $214/0,21 = 1019$ segundos, o que corresponde a aproximadamente 17 minutos.

Exercício 6. Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide $FMNP$, onde M, N e P são os pontos médios das arestas, como mostrado na figura para o vértice F.



Se V é o volume do cubo, calcule o volume da figura que resta quando são retiradas as pirâmides de cada um dos vértices do cubo.

Solução:

Esta é a questão 23 da Aula 29 do módulo.

Seja $\mathcal{P}$ o poliedro resultante das operações do enunciado. Seu volume é o volume do cubo menos oito vezes o volume da pirâmide $F - MNP$, pois foram retiradas uma pirâmide igual a esta de cada um dos 8 vértices do cubo. Assim

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = V - 8\text{Vol}(F - MNP).$$

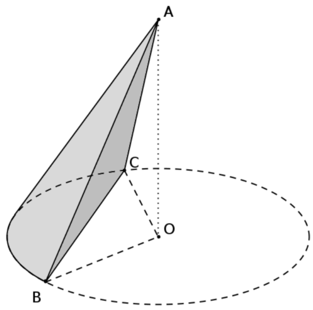
Passamos agora a calcular o $\text{Vol}(F - MNP)$. Como $F - MNP$ é um tetraedro, qualquer uma das faces pode ser tomada por base e, neste caso, o vértice oposto será o vértice da pirâmide. A escolha adequada é qualquer das faces contendo o vértice F porque assim a altura da pirâmide relativa a este vértice será metade da aresta do cubo. Digamos que a aresta do cubo original seja a.

Contas.

$$\text{Vol}(F{-}MNP) = \text{Vol}(M{-}FNP) = \frac{1}{3}\cdot\text{Área do triângulo}(FNP)\cdot MF = \frac{1}{3}\frac{FN \cdot FP}{2}\cdot MF = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{48}.$$

Portanto, $\text{Vol}(\mathcal{P}) = V - 8\frac{V}{48} = \frac{5V}{6}$.

Exercício 7. O sólido da figura é limitado pelo triângulo ABC, pela lateral de um cone de vértice A e por um segmento circular de centro O. Sabe-se que O é a projeção ortogonal de A sobre o plano que contém o círculo representado, que o ângulo $\widehat{BOC}$ é reto e que $OA = 6$cm e $OB = 3$cm. Determine o volume do sólido.



Solução:

Como o ângulo $\widehat{BOC}$ é reto, o sólido em questão é obtido retirando-se a pirâmide de base BOC e vértice A de um quarto do cone circular reto, cuja base é o círculo e cujo vértice é A. O volume do quarto de cone será dado, em unidades de volume, por

$$V_c = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi \cdot OB^2 \cdot OA}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} = \frac{9\pi}{2}.$$

O volume da pirâmide cuja base é o triângulo retângulo BOC e cuja altura é OA é dado, em unidades de volume, por

$$V_p = \frac{\frac{BO\cdot CO}{2}\cdot OA}{3} = \frac{\frac{9}{2}\cdot 6}{3} = 9.$$

Assim, o volume procurado é, em unidades de volume,

$$V = V_c - V_p = \frac{9\pi}{2} - 9 = 9\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$