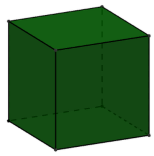
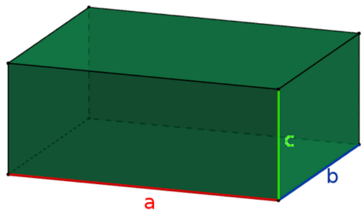
Solução do EP Aula 27 de Geometria Espacial

A fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo já é conhecida desde o Ensino Fundamental. Mas talvez você não saiba explicar por que essa fórmula vale. Esta atividade tem o objetivo de explorar o tema. Para isso, o cubo de aresta 1 será considerado como unidade e será chamado de *cubo unitário*.

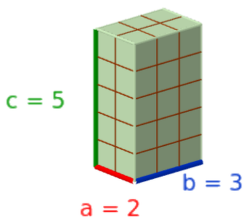


Como sabemos o paralelepípedo retângulo é determinado pelo conhecimento das medidas de suas três *dimensões* indicadas na figura por a, b e c.



O volume V de um paralelepípedo depende de suas dimensões, a, b e c. Assim, indicaremos V por $V(a,b,c)$, ou seja, $V(a,b,c)$ é o volume do paralelepípedo de dimensões a, b e c.

Desta forma, o volume do cubo de aresta 1 é $V(1,1,1) = 1$ e o volume de um paralelepípedo retângulo de lados $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$ é $V(2,3,5) = 30$ pois cabem 30 cubos de aresta 1 no espaço ocupado por esse pararlelepípedo.



Afirmação: Fixados três números reais positivos a, b e c. O volume do paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c é o produto abc.

Esta atividade vai justificar que $V(a,b,c) = abc$ para a, b e c números racionais positivos. Ela propõe construções que tratam a subdivisão do cubo unitário, encaminhando para a noção de "infinitamente pequeno". Esse raciocínio tem um papel essencial na matemática e é importante no desenvolvimento do pensamento humano moderno. Comecemos com uma simples observação:

Questão 1. Recomendamos o uso deste aplicativo para o desenvolvimento da tarefa.

a) Seguindo o modelo da figura acima, desenhe um paralelepípedo retângulo cujas arestas sejam $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ e outro cujas arestas sejam $a = 2$, $b = 4$ e $c = 3$.

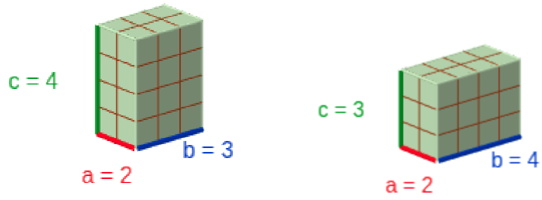
b) Obtenha uma relação entre os volumes $V(2,3,4)$ e $V(2,4,3)$. Explique.

c) Desenhe um paralelepípedo retângulo cujo volume seja $V(2,4,9)$, mas com arestas diferentes de 2, 4 e 9.

d) Relacione os volumes $V(2,4,3)$ e $V(2,4,9)$.

Solução:

a) Os paralelepípedos são



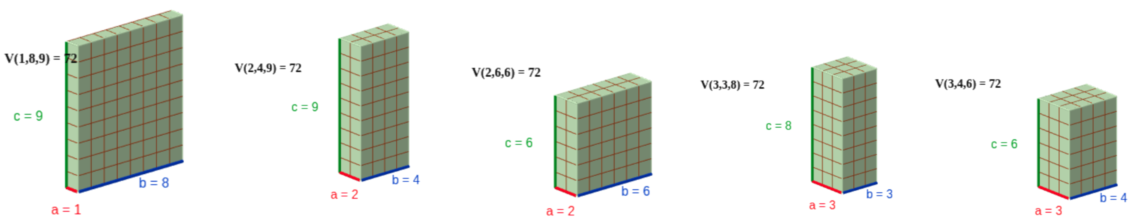
b) Os paralelepípedos são iguais, mas estão dispostos em posições diferentes, logo têm o mesmo volume:

$$V(2, 3, 4) = V(2, 4, 3).$$

c) Como no paralelepípedo de arestas 2, 4 e 9 são utilizados 72 cubos unitários, serve qualquer fatoração de 72 como produto de 3 números naturais. Como $72 = 2^3 \cdot 3^2$, são 12 as combinações possíveis a menos de mudanças de posição do paralelepípedo (ordem dos fatores). São eles

$$1 \cdot 1 \cdot 72, \quad 1 \cdot 2 \cdot 36, \quad 1 \cdot 3 \cdot 24, \quad 1 \cdot 4 \cdot 18, \quad 1 \cdot 6 \cdot 12, \quad 1 \cdot 8 \cdot 9,$$
$$2 \cdot 2 \cdot 18, \quad 2 \cdot 3 \cdot 12, \quad 2 \cdot 4 \cdot 9, \quad 2 \cdot 6 \cdot 6,$$
$$3 \cdot 3 \cdot 8 \quad e \quad 3 \cdot 4 \cdot 6.$$

Dentre esses exibimos aqueles que podem ser representados por meio do aplicativo. Todos os paralelepípedos têm o mesmo volume, 72 unidades de volume.



d) Temos $V(2, 4, 9) = 3V(2, 4, 3)$ pois o paralelepípedo de lados 2, 4 e 9 pode ser obtido pela justaposição de três paralelepípedos de lados 2, 4 e 3. Outra explicação é que o paralelepípedo de lados 2, 4 e 9 contém 3 vezes no número de cubos unitários que o paralelepípedo de lados 2, 4 e 3, de fato, o primeiro contém 72 cubos e o segundo contém 24 cubos.

Questão 2. Considere um paralelepípedo retângulo de arestas x, y e z de volume 12, isto é, $V(x, y, z) = 12$.

Recomendamos o uso deste aplicativo para o desenvolvimento desta tarefa.

a) Quanto valem $V(2x, y, z)$, $V(x, 3y, z)$ e $V(x, y, 4z)$? Justifique e faça uma figura para ilustrar cada uma de suas respostas? E $V(2x, 3y, z)$?

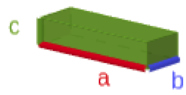
b) Encontre todos os valores inteiros para $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ de modo que $V(n_1x, n_2y, n_3z) = 144$.

c) Seja n um número natural. Quanto valem $V(nx, y, z)$, $V(x, ny, z)$, $V(x, y, nz)$ e $V(nx, ny, nz)$?

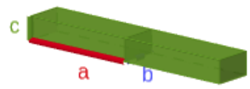
d) Conclua que se a, b e c são números naturais, então

$$V(a, b, c) = abcV(1, 1, 1) = abc.$$

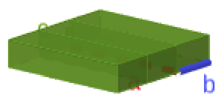
Solução: Representemos o paralelepípedo de lados a, b e c e volume 12 por



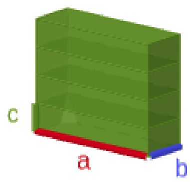
a) $V(2a,b,c) = 24$ pois como dobramos uma dimensão e mantivemos fixas as outras duas, o paralelepípedo resultante tem o volume igual a dois paralelepípedos iguais ao primeiro, mas dispostos como na figura.



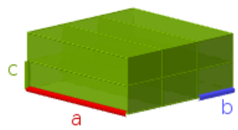
$V(a,3b,c) = 36$ pois como triplicamos uma das arestas e mantivemos fixas as outras duas, o paralelepípedo resultante tem o volume de três paralelepípedos iguais ao primeiro, mas dispostos como na figura.



$V(a,b,4c) = 48$ pois como quadruplicamos uma das dimensões e mantivemos fixas as outras duas, o paralelepípedo resultante tem o volume de quatro paralelepípedos iguais ao primeiro, mas dispostos como na figura.



$V(2a,3b,c) = 72$ pois seu volume equivale ao de 6 paralelepípedos iguais ao primeiro, de volume 12, justapostos como na figura a seguir.



b) Para que $V(n_1a, n_2b, n_3c) = 144$ é necessário que $n_1n_2n_3 = 12$, logo os valores são

n_1	n_2	n_3
1	1	12
1	2	6
1	3	4
2	2	3

c) Os valores de $V(na,b,c)$, $V(a,nb,c)$, $V(a,b,nc)$ são iguais a $12n$ pois cada um dos paralelepípedos corresponde a uma justaposição de n paralelepípedos iguais ao paralelepípedo considerado inicialmente. O valor de $V(na,nb,nc)$ é $12n^3$ pois o volume de um paralelepípedo de lados na, nb, nc corresponde ao volume de um paralelepípedo construído a partir da justaposição de n cópias do paralelepípedo original em cada uma das 3 dimensões, portanto, seu volume corresponde ao de n^3 paralelepípedos iniciais.

d) Se $a \in \mathbb{N}$, então $V(a, b, c) = V(a \cdot 1, b, c) = aV(1, b, c)$ pelo item anterior. Como $b \in \mathbb{N}$, temos $V(1, b, c) = V(1, b \cdot 1, c) = bV(1, 1, c)$. Analogamente, $V(1, 1, c) = cV(1, 1, 1)$. Juntando todas essas informações obtemos que $V(a, b, c) = aV(1, b, c) = ab(V(1, 1, c) = abcV(1, 1, 1) = abc$ para a, b e c números naturais.

Questão 3. Caso a, b e c sejam números racionais.

Recomendamos que seja usado este aplicativo para nos itens a) e b).

a) Desenhe o paralelepípedo retângulo de arestas 1, 1 e 1/2. Relacione $V(1, 1, 1/2)$ e $V(1, 1, 1)$. Faça o mesmo para os paralelepípedos de arestas 1, 1 e 1/4 e de arestas 1, 1/2 e 1/2.

b) Calcule os volumes a seguir. Explique as suas soluções.

(i) $V\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ (ii) $V\left(1, 1, \frac{1}{7}\right)$ (iii) $V\left(1, 1, \frac{3}{7}\right)$ (iv) $V\left(1, 1, \frac{4}{3}\right)$ (v) $V\left(1, 1, \frac{11}{17}\right)$

c) Explique com suas palavras a igualdade

$$V\left(1, 1, \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

para quaisquer m/n com m e n naturais.
Recomendamos que seja usado este aplicativo para nos itens a seguir.

d) Calcule os volumes a seguir. Explique as suas soluções e faça figuras para ilustrar a resposta.

(i) $V\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ (ii) $V\left(\frac{3}{7}, 1, 1\right)$ (iii) $V\left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ (iv) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (v) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}\right)$ (vi) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{37}{3}, \frac{11}{17}\right)$

e) Explique a igualdade

$$V\left(1, \frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) = \frac{pm}{qn}$$

para quaisquer números naturais p, q, m e n (sugestão: lembre-se que já verificamos que $V(1, 1, m/n) = m/n$).

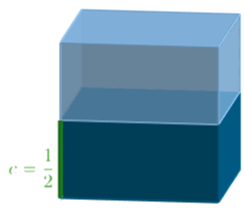
De modo similar você pode explicar que

$$V\left(\frac{r}{s}, \frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) = \frac{rpm}{sqn},$$

para quaisquer r, s, p, q, m e n naturais.

Solução:

a) $V(1, 1, 1/2) = \frac{1}{2}V(1, 1, 1)$ pois empilharmos dois paralelepípedos de dimensões 1, 1 e 1/2 obteremos um paralelepípedo de arestas 1, 1 e 1, veja a figura.

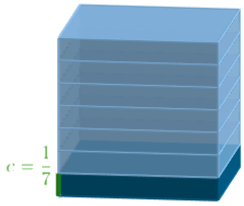


Um paralelepípedo de dimensões 1, 1 e 1/4 pode ser obtido pela divisão de um outro de dimensões 1, 1 e 1/2 em dois paralelepípedos iguais, logo $V(1, 1, 1/4) = \frac{1}{2}V(1, 1, 1/2) = \frac{1}{4}V(1, 1, 1)$.

Um paralelepípedo de dimensões 1, 1/2 e 1/2 pode ser obtido pela divisão do paralelepípedo de dimensões 1, 1, 1/2 em dois paralelepípedos iguais, logo $V(1, 1/2, 1/2) = \frac{1}{2}V(1, 1, 1/2) = \frac{1}{4}V(1, 1, 1)$.

b) (i) $V(1, 1, 1/2) = 1/2$ pois $V(1, 1, 1) = 1$, conforme justificado no item a).

(ii) $V(1, 1, 1/7) = 1/7$ pois o paralelepípedo de dimensões 1, 1 e 1/7 é o que obtemos quando dividimos o cubo unitário em 7 parte iguais como na figura a seguir.



(iii) $V(1, 1, 3/7) = 3/7$ pois o paralelepípedo de dimensões 1, 1 e 3/7 é o que obtemos ao empilharmos 3 cópias do paralelepípedo de dimensões 1, 1, 1/7.

(iv) $V(1, 1, 4/3) = 4/3$ pois se dividirmos o cubo unitário em três partes iguais na sua altura (dimensão que estamos considerando relacionada à terceira coordenada), obteremos 3 paralelepípedos de volume 1/3. Empilhando 4 paralelepípedos iguais a este último obtemos um paralelepípedo de dimensões 1, 1 e 4/3 e seu volume é 4 vezes o volume do anterior, isto é, 4/3.

(v) $V(1, 1, 11/17) = 11/17$ com justificativa análoga às anteriores.

c) Divida um cubo unitário em n partes iguais por meio de cortes na dimensão correspondente à altura (como na notação utilizada). Cada um destes paralelepípedos terá volume igual à $1/n$. Tome m cópias deste último paralelepípedo e empilhe todas elas de modo a formar um paralelepípedo de dimensões 1, 1 e m/n. Este paralelepípedo tem o volume de m cópias de um paralelepípedo de volume $1/n$, logo seu volume é m/n.

d) Como observado anteriormente quaisquer que sejam a, b e c, temos $V(a, b, c) = V(b, a, c) = V(b, c, a)$, etc. Pois os paralelepípedos são congruentes entre si.

(i) $V(1, 1/2, 1) = V(1, 1, 1/2) = 1/2$ conforme já justificado no item anterior.

(ii) $V(3/7, 1, 1) = V(1, 1, 3/7) = 3/7$ conforme já justificado no item anterior.

(iii) $V(1, 1/5, 1/3) = 1/15$ pois já sabemos que $V(1, 1, 1/3) = 1/3$ do item anterior e o paralelepípedo de dimensões 1, 1/5 e 1/3 pode ser obtido pela divisão deste último em 5 partes iguais na segunda dimensão. Logo seu volume será um quinto do volume do anterior, isto é, um quinto de um terço: 1/15.

(iv) $V(1/2, 1/2, 1/2) = 1/8$ pois já vimos que $V(1, 1/2, 1/2) = 1/4$ no item a) e o cubo de lado 1/2, isto é, paralelepípedo de dimensões 1/2, 1/2 e 1/2, é uma metade do paralelepípedo de dimensões 1, 1/2 e 1/2. Logo $V(1/2.1/2, 1/2)$ é metade de 1/4, ou seja, 1/8.

Os itens (v) e (vi) são justificados de modo análogo aos anteriores.

e) Já justificamos que $V(1, 1, m/n) = m/n$ no item c). Um paralelepípedo $\mathcal{P}$, de dimensões 1, p/q e m/n, pode ser obtido do paralelepípedo $\mathcal{P}'$, de dimensões 1, 1 e m/n, a partir da divisão da segunda dimensão em q partes iguais e considerando o paralelepípedo formado por p dessas partes. Cada uma das q partes de $\mathcal{P}'$ tem volume $\frac{1}{q}\frac{m}{n}$, como estamos considerando p destas partes iguais para formar $\mathcal{P}$, seu volume é $V(1, p/q, m/n) = pm/qn$.