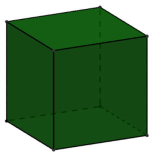
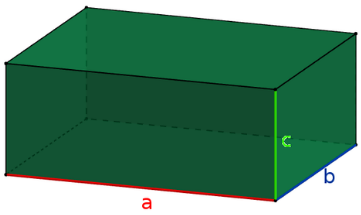
EP Aula 27 de Geometria Espacial

A fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo já é conhecida desde o Ensino Fundamental. Mas talvez você não saiba explicar por que essa fórmula vale. Esta atividade tem o objetivo de explorar o tema. Para isso, o cubo de aresta 1 será considerado como unidade e será chamado de *cubo unitário*.

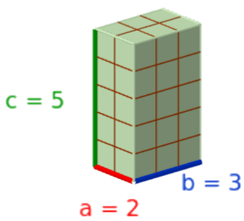


Como sabemos o paralelepípedo retângulo é determinado pelo conhecimento das medidas de suas três *dimensões* indicadas na figura por a, b e c.



O volume V de um paralelepípedo depende de suas dimensões, a, b e c. Assim, indicaremos V por $V(a,b,c)$, ou seja, $V(a,b,c)$ é o volume do paralelepípedo de dimensões a, b e c.

Desta forma, o volume do cubo de aresta 1 é $V(1,1,1) = 1$ e o volume de um paralelepípedo retângulo de lados $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$ é $V(2,3,5) = 30$ pois cabem 30 cubos de aresta 1 no espaço ocupado por esse pararlelepípedo.



Afirmação: Fixados três números reais positivos a, b e c. O volume do paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c é o produto abc.

Esta atividade vai justificar que $V(a,b,c) = abc$ para a, b e c números racionais positivos. Ela propõe construções que tratam a subdivisão do cubo unitário, encaminhando para a noção de "infinitamente pequeno". Esse raciocínio tem um papel essencial na matemática e é importante no desenvolvimento do pensamento humano moderno. Comecemos com uma simples observação:

Questão 1. Recomendamos o uso deste aplicativo para o desenvolvimento da tarefa.

a) Seguindo o modelo da figura acima, desenhe um paralelepípedo retângulo cujas arestas sejam $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ e outro cujas arestas sejam $a = 2$, $b = 4$ e $c = 3$.

b) Obtenha uma relação entre os volumes $V(2,3,4)$ e $V(2,4,3)$. Explique.

c) Desenhe um paralelepípedo retângulo cujo volume seja $V(2,4,9)$, mas com arestas diferentes de 2, 4 e 9.

d) Relacione os volumes $V(2,4,3)$ e $V(2,4,9)$.

Questão 2. Considere um paralelepípedo retângulo de arestas x, y e z de volume 12, isto é, $V(x,y,z) = 12$.

Recomendamos o uso deste aplicativo para o desenvolvimento desta tarefa.

a) Quanto valem $V(2x,y,z)$, $V(x,3y,z)$ e $V(x,y,4z)$? Justifique e faça uma figura para ilustrar cada uma de suas respostas? E $V(2x,3y,z)$?

b) Encontre todos os valores inteiros para $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ de modo que $V(n_1x, n_2y, n_3z) = 144$.

c) Seja n um número natural. Quanto valem $V(nx,y,z)$, $V(x,ny,z)$, $V(x,y,nz)$ e $V(nx,ny,nz)$?

d) Conclua que se a, b e c são números naturais, então

$$V(a,b,c) = abcV(1,1,1) = abc.$$

Questão 3. Caso a, b e c sejam números racionais.

Recomendamos que seja usado este aplicativo para nos itens a) e b).

a) Desenhe o paralelepípedo retângulo de arestas 1, 1 e 1/2. Relacione $V(1,1,1/2)$ e $V(1,1,1)$. Faça o mesmo para os paralelepípedos de arestas 1, 1 e 1/4 e de arestas 1, 1/2 e 1/2.

b) Calcule os volumes a seguir. Explique as suas soluções.

(i) $V\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ (ii) $V\left(1,1,\frac{1}{7}\right)$ (iii) $V\left(1,1,\frac{3}{7}\right)$ (iv) $V\left(1,1,\frac{4}{3}\right)$ (v) $V\left(1,1,\frac{11}{17}\right)$

c) Explique com suas palavras a igualdade

$$V\left(1,1,\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$$

para quaisquer m/n com m e n naturais. Recomendamos que seja usado este aplicativo para nos itens a seguir.

d) Calcule os volumes a seguir. Explique as suas soluções e faça figuras para ilustrar a resposta.

(i) $V\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ (ii) $V\left(\frac{3}{7},1,1\right)$ (iii) $V\left(1,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)$ (iv) $V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (v) $V\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{2}{5}\right)$ (vi) $V\left(\frac{1}{2},\frac{37}{3},\frac{11}{17}\right)$

e) Explique a igualdade

$$V\left(1,\frac{p}{q},\frac{m}{n}\right)=\frac{pm}{qn}$$

para quaisquer números naturais p, q, m e n (sugestão: lembre-se que já verificamos que $V(1,1,m/n)=m/n$).

De modo similar você pode explicar que

$$V\left(\frac{r}{s},\frac{p}{q},\frac{m}{n}\right)=\frac{rpm}{sqn},$$

para quaisquer r, s, p, q, m e n naturais.