



## Geometria Espacial - EP Aula 26 - Gabarito- Poliedros

**Questão 1.** Nesta atividade eletrônica você vai refletir sobre a definição de poliedro apresentada no módulo.

<https://www.geogebra.org/m/cvekcytw>

### Solução:

- Sim, é um poliedro pois é uma reunião finita de polígonos planos que cumprem as duas condições da definição.
- Não é um poliedro pois existe uma aresta de uma das faces que é aresta de quatro faces.
- Não é um poliedro pois se a face superior do “cubo maior” for um quadrado, então existem dois polígonos que possuem interseção não vazia, que não é uma aresta comum nem é um vértice comum. Por outro lado, se a face superior do “cubo maior” for um quadrado do qual se removeu um quadrado, então isso não é um polígono plano, pela definição dada. Então o objeto representado não é a reunião finita de polígonos planos.
- Sim, é um poliedro pois é uma reunião finita de polígonos planos que cumprem as duas condições da definição.
- Não é um poliedro pois a “face superior” não é realmente um polígono, pela definição de polígono apresentada.

**Questão 2.** Descreva e desenhe todos os poliedros convexos que possuem 10 arestas. Justifique a sua solução detalhadamente (**dica:** mostre primeiro que todo poliedro de 10 arestas, possui 6 faces).

### Solução:

Sejam  $A$  o número de arestas,  $V$  o número de vértices e  $F$  o número de faces do poliedro em questão. Por hipótese, temos  $A = 10$ . Vamos mostrar que  $F = 6$ .

Para cada  $k \geq 3$ , seja  $F_k$  o número de faces de gênero ( gênero de um polígono é o número de lados deste polígono)  $k$  do poliedro. Isto é,  $F_3$  é o número de faces triangulares,  $F_4$  é o número de faces quadrangulares, etc.

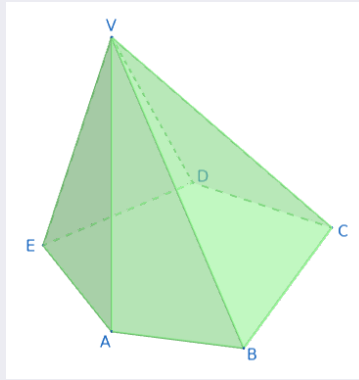
*Afirmção:* Em todo poliedro valem  $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \dots$  e  $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$ .

*Consequência da Afirmção:*  $2A \geq 3F$  e  $2A \geq 3V$ .

Como  $A = 10$ , e  $F \geq 4$  temos  $F = 4$ ,  $F = 5$  ou  $F = 6$ .

A relação de Euler afirma que  $V - A + F = 2$ . Juntamente com o fato de que  $F = 4$ , 5 ou 6, decorre que  $V = 6$ , 7 ou 8. De fato, se  $F = 4$ , então  $V - 10 + 4 = 2$ , logo  $V = 8$ . Se  $F = 5$ , então  $V - 10 + 5 = 2$ , logo  $V = 7$ . Analogamente, se  $F = 6$ , então  $V = 6$ . Como  $2A \geq 3V$  e  $A = 10$ , temos  $V \leq 6$ . Portanto,  $V = 6$  pois já verificamos que  $V = 6$ , 7 ou 8. Como  $V = 6$  e  $A = 10$ , o Teorema de Euler garante que  $F = 6$ .

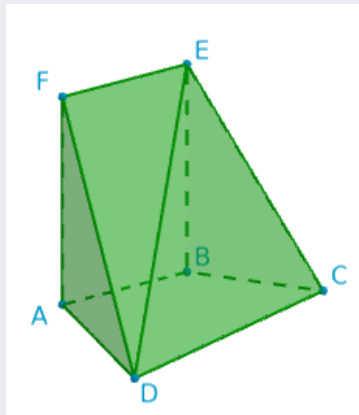
Os poliedros procurados possuem  $V = 6$ ,  $A = 10$  e  $F = 6$ . Para caracterizar os poliedros precisamos saber quantas faces de cada gênero ele possui, isto é, precisamos conhecer  $F_k$  para todo  $k \geq 3$ . Como  $V = F = 6$  temos  $F_k = V_k = 0$  para todo  $k \geq 6$ . De fato, um poliedro com 6 vértices não pode possuir uma face de gênero 6, 7, 8, etc. nem um vértice em que incidam 6 arestas (ou mais). Se  $F_5 = 1$ , então possui uma face pentagonal que contém 5 dos seis vértices. Este poliedro já podemos descrever: é uma pirâmide de base pentagonal.



Finalmente, da afirmação conclui-se que  $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 = 20$ . Como  $F_3$ ,  $F_4$  e  $F_5$  são inteiros positivos, existem poucas soluções possíveis. Analizemos caso a caso na tabela:

$F_3$	$F_4$	$F_5$	$3F_3 + 4F_4 + 5F_5$
6	0	0	18
5	1	0	19
4	2	0	20
3	3	0	21
2	4	0	22
1	5	0	23
0	6	0	24
5	0	1	20

O poliedro novo que obtemos na tabela possui 4 faces triangulares e 2 faces quadrangulares. Como ele possui exatamente 6 vértices, as faces quadrangulares são adjacentes, logo ele fica determinado.



Você pode manipular este poliedro no link <https://ggbm.at/dfmsvsds>.

#### *Justificativa da Afirmação e sua consequência:*

Se um poliedro possui  $F_3$  faces triangulares,  $F_4$  faces quadrangulares, etc., o número de arestas deste poliedro pode ser contado da seguinte maneira: cada face triangular possui 3 arestas, então são  $3F_3$  arestas em faces triangulares, cada face quadrangular possui 4 arestas, então são  $4F_4$  arestas em faces quadrangulares e assim por diante. Como cada aresta é lado de exatamente 2 faces, temos

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \dots$$

Desta igualdade decorre que

$$\begin{aligned} 2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \dots &= 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots \\ &\geq 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) \\ &= 3F \end{aligned}$$

Portanto,  $2A \geq 3F$  e a igualdade acontece exatamente quando todas as faces do poliedro são triangulares. Agora passamos a justificar que  $2A \geq 3V$ . Para cada  $k = 3, 4, \dots$ , seja  $V_k$  o número de vértices em que incidem  $k$  arestas. Argumentando de maneira análoga ao caso das faces temos  $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$ . De onde decorre que  $2A \geq 3V$ . Também aqui a igualdade ocorre quando em todos os vértices do poliedro incidem o mesmo número de arestas.

**Questão 3.** Um poliedro convexo  $P$  possui  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces. Constroem-se pirâmides com vértices exteriores a  $P$  com bases em cada uma das faces. Fica formado então um poliedro  $P'$  que só possui faces triangulares. Determine os números de arestas, faces e vértices de  $P'$ .

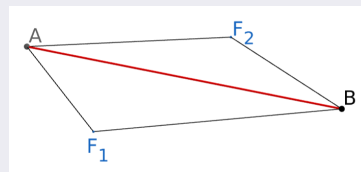
### Solução:

Para resolver um exercício como este vale a pena você primeiro fazer alguns exemplos e buscar uma maneira apropriada para contabilizar os números de arestas, vértices e faces do novo poliedro em uma situação genérica.

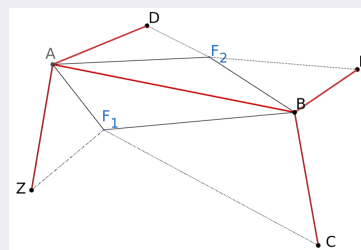
Sejam  $A'$ ,  $V'$  e  $F'$ , respectivamente os números de arestas, vértices e faces do poliedro  $P'$ . Temos:

- $A' = 3A$ .

Cada aresta é aresta de exatamente duas faces. A partir de cada uma das arestas de um poliedro, se originarão dois triângulos. Então de cada aresta se originarão 4 novas arestas (na figura  $AB$  é a aresta original do poliedro,  $F_1$  e  $F_2$  são vértices de  $P'$  originados sobre as faces de nomes  $f_1$  e  $f_2$ ). O que nos leva a crer que  $A' = A + 4A = 5A$ .



Contudo, desta forma estamos contabilizando duas vezes cada nova aresta: pois as estaremos contabilizando também como geradas pelas arestas adjacentes da aresta original (na figura as novas arestas  $AD$  e  $BE$  são vértices da face  $f_2$  e  $AZ$  e  $BC$  são vértices da face  $f_1$ , observe que se  $f_1$  for triangular, então  $C = Z$ , se  $f_2$  for triangular, então  $D = E$ , mas isso não muda o argumento em nada). Dividindo o saldo por dois obtemos  $A' = A + 2A = 3A$ .



- $V' = V + F$ .

Os vértices originais de  $P$  ainda serão vértices de  $P'$ , mas para cada face de  $P$  obteremos um novo vértice para  $P'$ , em relação aos vértices de  $P$ . Portanto,  $V' = V + F$ .

- $F' = 2A$

Uma maneira de se obter este resultado é observando que sempre é possível construir as pirâmides de modo que o poliedro  $P'$  seja convexo e, neste caso, valerá a relação de Euler. Portanto, vale a relação de Euler para  $P'$  mesmo que o poliedro não seja convexo, isto é,  $V' - A' + F' = 2$ . Substituindo os valores já conhecidos obtemos

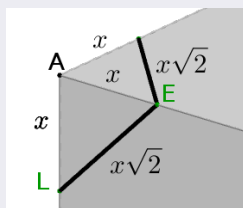
$$\begin{aligned} V' - A' + F' &= 2 \\ (V + F) - (3A) + F' &= 2 \\ (V - A + F) - 2A + F' &= 2 \\ F' &= 2A \end{aligned}$$

**Questão 4.** Um cubo de aresta  $a$  é seccionado por planos que cortam cada um, todas as arestas concorrentes num vértice em pontos que distam  $x$  ( $x < a/2$ ) deste vértice. Retirando-se as pirâmides formadas, obtém-se um poliedro  $P$ . Descreva esse poliedro e calcule seu número de diagonais.

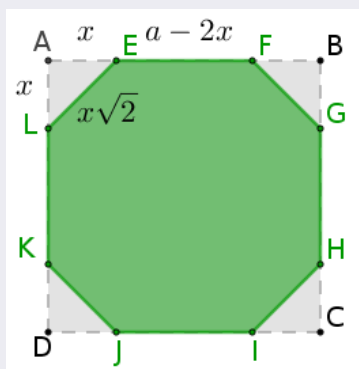
### Solução:

Seja  $A$  um vértice qualquer do cubo em questão. A interseção do plano que secciona o cubo por este vértice com cada uma das faces forma com as arestas do cubo que passam por  $A$  um triângulo retângulo

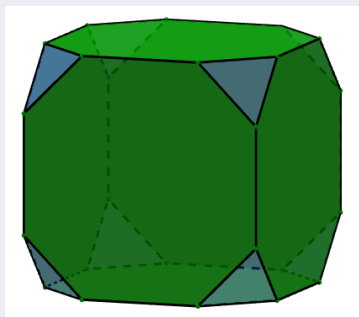
isósceles de catetos iguais a  $x$ . Assim, a base da pirâmide retirada a partir desta seção possui base triangular de lado  $x\sqrt{2}$  (use Pitágoras no triângulo isósceles para obter a hipotenusa).



Portanto, cada vértice do cubo dará origem a uma face que é um triângulo equilátero de lado  $x\sqrt{2}$  no novo poliedro. De cada uma das faces do cubo serão retirados quatro triângulos retângulos isósceles de cada canto, formando um octógono de lados alternados  $x\sqrt{2}$  e  $a - 2x$  (como  $x < a/2$ , temos  $a - 2x > 0$ ).



Finalmente, o poliedro resultante possui 14 faces, 8 delas são triângulos equiláteros de lado  $x\sqrt{2}$  e 6 faces são octógonos de lados com medidas alternadas  $x\sqrt{2}$  e  $a - 2x$ . Este poliedro possui 24 vértices, pois cada um dos 8 vértices originais do cubo deu lugar a três vértices da face triangular e possui 36 arestas: as 12 originais reduziram de tamanho, mas permaneceram no poliedro e 3 para cada uma das novas 8 faces, são  $12 + 3 \cdot 8 = 36$ .



Você pode interagir com o poliedro em questão no link: <https://ggbm.at/ffhwdtkt>.

#### Contagem do número de diagonais

São 24 vértices, então cada um deles pode se conectar com 23 outros vértices, mas destes 13 estão na mesma face que o vértice tomado (basta contar diretamente). Assim, de cada vértice partem  $23 - 13 = 10$  diagonais. Como são 24 vértices contamos 240 diagonais. Mas deste modo contamos cada diagonal duas vezes: uma a partir de cada extremidade, portanto, dividimos por 2 e obtemos 120 diagonais.

**Questão 5.** Segundo um dicionário “definição” significa “operação linguística que busca a determinação clara e precisa de um conceito ou um objeto.”.

- Defina polígono regular (não é necessário definir polígono).
- Defina poliedro regular (não é necessário definir poliedro).
- Explique o conceito de poliedro regular e dê exemplos de poliedros regulares.

**Solução:**

- a) Um polígono é regular quando todos os seus lados têm comprimentos iguais e todos os seus ângulos internos têm mesma medida.
- b) Um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si e em cada vértice incide o mesmo número de arestas.
- c) Os poliedros regulares são aqueles em que as faces e vértices são geometricamente indistinguíveis, isto é, não é possível distinguir uns dos outros por meio de entes geométricos, mas apenas por rótulos, cores ou outras informações não geométricas. Alguns professores costumam brincar que ele é regular se ao escolhermos um vértice ou face e depois jogá-lo para cima e pegá-lo novamente com as mãos não pudermos mais reconhecer o vértice nem a face escolhida.

Há apenas 5 poliedros regulares:

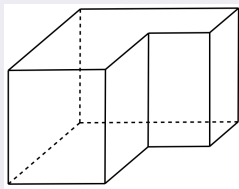
- (i) tetraedro regular (pirâmide regular de base e faces laterais triângulos equiláteros).
- (ii) hexaedro regular (cubo).
- (iii) octaedro regular.
- (iv) dodecaedro regular.
- (v) icosaedro regular.

Veja imagens na sala da disciplina (Semana 10)

**Questão 6.** Explique brevemente a relação de Euler para poliedros. Em sua explicação, lembre-se de definir, diga sob que condições a relação é verdadeira, se a relação pode valer sem estas condições e apresente exemplos.

**Solução:**

Fixado um poliedro  $\mathcal{P}$  com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, a relação de Euler é o número  $\chi(\mathcal{P}) = V - A + F$ . O Teorema de Euler afirma que para todo poliedro convexo  $\mathcal{P}$  vale  $\chi(\mathcal{P}) = 2$ . Assim, a condição do poliedro  $\mathcal{P}$  ser convexo é suficiente para que  $V - A + F = 2$ . Contudo essa condição não é necessária, isto é, há poliedros não convexos para os quais  $V - A + F = 2$ . Por exemplo



**Questão 7.** A seguir são enunciadas definições de poliedro e solitada a construção de exemplos. Seus exemplos devem conter figuras e, preferencialmente, conter também links para construções no Geogebra. Capriche!

**Definição 1** (Poliedro tipo A (Geometria Básica, módulo 2 - E. L. C. Ferreira e outros - Cederj)). *Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados faces tais que:*

- cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
- a interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

**Definição 2** (Poliedro tipo B (A Matemática do Ensino Médio, vol. 2 - E. L. Lima - IMPA)). *Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

- (i) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- (ii) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

*Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.*

- (iii) *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).*

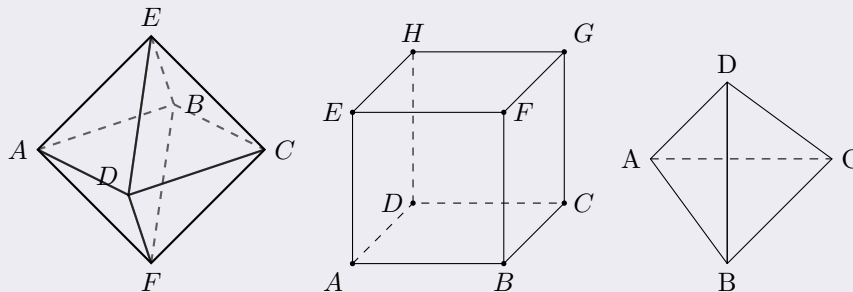
**Definição 3** (Poliedro tipo C (Basic Topology - M. A. Armstrong - Springer)). *Um poliedro é uma coleção*

finita de polígonos planos que se encaixam bem, no seguinte sentido. Se dois polígonos se encontram, eles têm exatamente um lado em comum (incluindo os vértices deste lado) ou um vértice em comum. Cada lado de um polígono é lado de exatamente um outro polígono. Além disso, exige-se que, se considerarmos os polígonos que contêm um vértice em particular, então podemos nomeá-los  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  de tal forma que  $Q_i$  tem um lado em comum com  $Q_{i+1}$  para  $1 \leq i < k$ , e  $Q_k$  tem um lado em comum com  $Q_1$ . Em outras palavras, os polígonos se encaixam para formar uma superfície ao redor de um vértice. O número  $k$  pode variar de um vértice para outro.

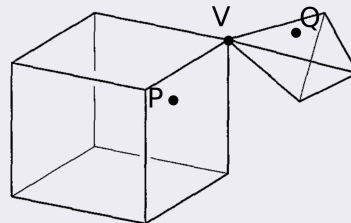
- Existe poliedro que seja dos três tipos A, B e C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
- Existe poliedro do tipo A, mas que não é do tipo B? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
- Existe poliedro do tipo A, mas que não é do tipo C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
- Existe poliedro do tipo B, mas que não é do tipo C? Em caso afirmativo apresente um exemplo.
- Existe poliedro do tipo C, mas que não é do tipo B? Em caso afirmativo apresente um exemplo.

### Solução:

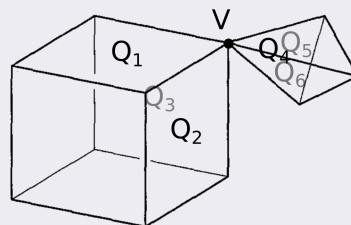
- Sim, todas as três definições comportam os poliedros regulares, prismas e pirâmides quando vistos como poliedros e não como sólidos.



- Sim, basta encontrar um sólido que cumpra as condições (i) e (ii), mas não cumpra a condição (iii). O exemplo a seguir, é um exemplo de poliedro do tipo A que não é do tipo B. Observe que tomando um ponto  $P$  em qualquer face do cubo e um ponto  $Q$  em qualquer face do tetraedro, não se pode ir de  $P$  a  $Q$  sem cruzar o vértice  $V$ . Portanto, não é válida a condição (iii).



- Sim, novamente as duas primeiras propriedades que definem os poliedros do tipo C equivalem às duas propriedades que definem os poliedros do tipo A. Assim, para obter um poliedro que seja do tipo A, mas não do tipo C, precisamos encontrar um poliedro que cumpra as duas primeiras propriedades comuns, mas que não cumpra a terceira propriedade de poliedro do tipo C. O mesmo exemplo do item anterior serve.



De fato, o vértice  $V$  está contido em seis polígonos (faces), três no cubo e três no tetraedro. Não é possível nomear os seis polígonos como  $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$  de tal forma que  $Q_i$  tenha um lado em comum com  $Q_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $Q_6$  tenha um lado comum com  $Q_1$  porque os polígonos contidos no cubo não têm lado comum com as faces do tetraedro. Por exemplo, nomeando as faces

no vértice  $V$  contidas no cubo por  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  e as contidas no tetraedro por  $Q_4$ ,  $Q_5$  e  $Q_6$ , não haverá aresta comum a  $Q_3$  e a  $Q_4$ .

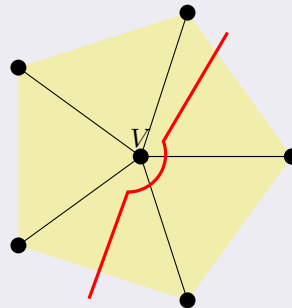
- d) Não é possível porque as terceiras condições nas duas definições as tornam definições equivalentes.  
e) Idem à anterior.

**Comentário pós-solução, apenas para estudantes curiosos:** Você não precisava argumentar para justificar a equivalência entre as duas condições, mas precisou analisá-las com cuidado para afirmar que são equivalentes e responder os itens d) e e). Uma argumentação bastante visual está indicada a seguir:

**Condição B:** É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

**Condição C:** Se considerarmos os polígonos que contêm um vértice em particular, então podemos nomeá-los  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  de tal forma que  $Q_i$  tem um lado em comum com  $Q_{i+1}$  para  $1 \leq i < k$ , e  $Q_k$  tem um lado em comum com  $Q_1$ .

Considere um poliedro do tipo C. Tome pontos  $P$  e  $Q$  em faces distintas desse poliedro. Imagine que um vértice  $V$  desse poliedro esteja atrapalhando a construção de um caminho como descrito na Condição B. Como vale a Condição C para o vértice  $V$ , é possível contornar o vértice  $V$  como na figura a seguir. Logo vale a Condição B também.



Agora considere um poliedro do tipo B. Tome um vértice  $V$  nesse poliedro. Como o poliedro é do tipo B, ele é a reunião de uma quantidade finita de polígonos, por isso é possível numerar os, digamos,  $k$  polígonos que contêm o vértice  $V$  como  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ . Como cada lado de um polígono é aresta de um, e apenas um, outro polígono, esse outro polígono também contém o vértice  $V$  e, portanto, é um dos  $k$  polígonos numerados. Isso significa que não pode ocorrer de ao percorrer o entorno do vértice  $V$  pelas faces que o contêm, as faces simplesmente terminarem antes de se completar a volta e termos uma aresta comum a  $Q_k$  e a  $Q_1$ . Neste ponto o leitor atento poderia questionar se não poderia ocorrer da volta ao redor de  $V$  terminar sem termos passado pelos  $k$  polígonos, como ocorre no exemplo do item c). Contudo, isso contradiz a Condição B, como mostramos no item b). Finalmente, se um poliedro é do tipo B, ele também cumpre a Condição C e as definições são equivalentes.

**Questão 8.** Nesta questão apresentamos uma construção feita no livro Basic Topology (M. A. Armstrong, Springer) com o objetivo de provar uma versão mais geral do Teorema de Euler.

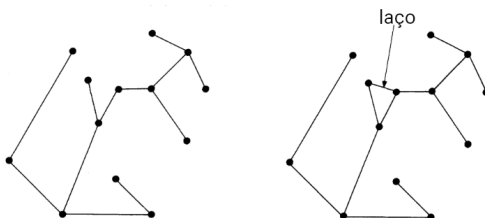
**Teorema de Euler.** Seja  $P$  um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces tal que:

- (a) Quaisquer dois vértices podem ser conectados por uma sequência de arestas.  
(b) Qualquer curva fechada (laço) sobre  $P$  separa o poliedro  $P$  em duas partes disjuntas.

Então  $V - A + F = 2$ .

**Demonstração:**

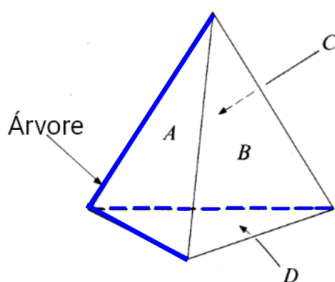
Um conjunto conexo de vértices e arestas de  $P$  será chamado de *grafo*: conexo significa simplesmente que quaisquer dois vértices podem ser ligados por uma cadeia de arestas no grafo. Mais geralmente podemos usar a palavra grafo para qualquer conjunto finito de segmentos de reta no espaço tridimensional que se encaixam bem como na figura a seguir (se dois segmentos se intersectam, isso ocorre em um de seus vértices).



Grafos. Na esquerda uma árvore, na direita um grafo com laço.

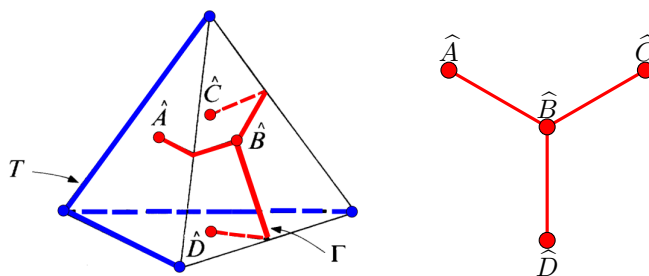
Um grafo que não contém *laços* é chamado de *árvore*. Repare que para qualquer árvore, o número de vértices menos o número de arestas é igual a 1. Se a árvore é denotada por  $T$ , então podemos escrever  $v(T) - a(T) = 1$ .

O conjunto de todos os vértices e arestas do poliedro  $P$  é um grafo. Não é difícil de mostrar que todo grafo possui um subgrafo que é uma árvore e contém todos os vértices do grafo original. Então escolha uma árvore  $T$  que consista de algumas arestas e de *todos* os vértices de  $P$  (veja o exemplo do tetraedro na figura a seguir).



Árvore  $T$  no tetraedro.

Agora considere uma espécie de “dual” de  $T$ . Este dual é um grafo  $\Gamma$  definido da seguinte maneira. Para cada face  $A$  de  $P$  criamos um vértice  $\hat{A}$  de  $\Gamma$ . Dois vértices  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  de  $\Gamma$  serão unidos por uma aresta de  $\Gamma$  se, e somente se, as faces correspondentes  $A$  e  $B$  são adjacentes e a aresta comum dessas duas faces não é uma aresta de  $T$ . É possível representar  $\Gamma$  em  $P$  sem que ele intersecte  $T$  (o vértice  $\hat{A}$  corresponde a um ponto interior da face  $A$ , veja a figura a seguir).



Árvores  $T$  e  $\Gamma$  no tetraedro à esquerda. Árvore  $\Gamma$ , à direita.

Não é difícil de acreditar que o dual  $\Gamma$  é conexo e, portanto, é um grafo. Intuitivamente, se dois vértices de  $\Gamma$  não podem ser unidos por uma sequência de arestas de  $\Gamma$ , então eles estariam separados um do outro por um laço de  $T$ . Como  $T$  não contém laços, deduzimos que  $\Gamma$  precisa ser conexo.

Observe que  $\Gamma$  é uma árvore. Se  $\Gamma$  tivesse um laço, ele separaria o poliedro  $P$  em duas partes, pela hipótese (b). E cada uma dessas duas partes precisa conter ao menos um vértice de  $T$ . Qualquer tentativa de conectar dois vértices de  $P$  que estejam cada um em uma dessas partes, precisa intersectar o laço de  $\Gamma$  que separa as duas partes. Isso contradiz o fato de  $T$  ser conexo. Portanto,  $\Gamma$  é uma árvore.

<<Argumentos>>

Portanto, se  $V$ ,  $A$  e  $F$  são, respectivamente, os números de vértices, arestas e faces de  $P$ , então  $V - A + F = 2$ . O que conclui a demonstração.

- a) Construa um cubo no Geogebra e destaque nele árvores  $T$  e  $\Gamma$  como as apresentadas acima para o tetraedro.



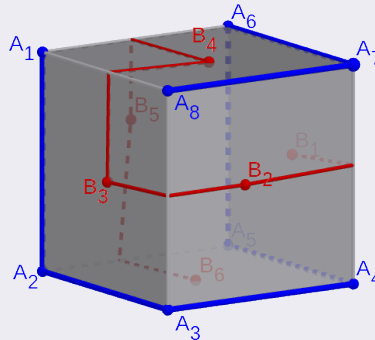
Inclua na sua resposta o link para sua construção e imagens da construção feita.

- b) Mostre que para qualquer árvore  $T$  vale  $v(T) - a(T) = 1$ .  
 c) Complete a demonstração do Teorema de Euler usando os grafos  $T$  e  $\Gamma$ .

### Solução:

a)

<https://www.geogebra.org/m/rbjuqz2c>

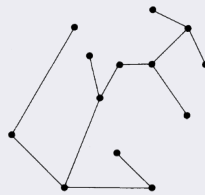


A árvore  $T$  está representada em azul e a árvore  $\Gamma$ , em vermelho.

Esta não é a única resposta correta. O grafo  $T$  precisa ser uma árvore (não tem laços), contém todos os vértices do cubo e suas arestas são arestas do cubo.

O grafo  $\Gamma$  é uma árvore, tem 6 vértices e 5 arestas, seus vértices estão em faces distintas do cubo, suas arestas necessariamente cruzam as arestas do cubo que não são arestas de  $T$ .

- b) Considere uma árvore  $T$  qualquer. Use um grafo em árvore como exemplo para fixar as ideias durante a leitura desta demonstração, por exemplo, a árvore da figura a seguir.



Escolha um vértice nesta árvore para começar a contar. Como começamos num vértice a conta está em  $+1$ . A partir daí percorra a árvore adicionando  $-1$  para cada aresta e adicionando  $+1$  para cada vértice. Como cada aresta é sucedida por um vértice ainda não contabilizado (lembre-se que não há laços), então a conta será sempre

vértice (aresta e vértice) ... (aresta e vértice),

de modo que as partes entre parênteses sempre somam zero. Assim, a conta  $v(T) - a(T)$  sempre termina em  $+1$ , conforme queríamos demonstrar.

- c) Por construção, existe uma correspondência biunívoca entre os vértices do poliedro e os vértices da árvore  $T$ , portanto, as quantidades são iguais, isto é,  $v(T) = V$ . Analogamente,  $v(\Gamma) = F$  e  $a(T) + a(\Gamma) = A$  pois as arestas dos grafos se complementam para corresponder às arestas do poliedro sem sobras em qualquer dos lados. Conclusão

$$\begin{aligned} V - A + F &= v(T) - (a(T) + a(\Gamma)) + v(\Gamma) \\ &= (v(T) - a(T)) + (v(\Gamma) - a(\Gamma)) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$