Aula 23 – A pirâmide

Objetivos

- Identificar e classificar pirâmides.
- Conhecer propriedades de pirâmides.

Introdução

Continuando o nosso estudo dos principais sólidos geométricos, veremos nesta aula a definição de pirâmide, seus elementos e suas partes.

Considere um polígono convexo $P = A_1A_2 \dots A_n$ contido em um plano α, e um ponto A fora de α. Para todo ponto X pertencente a P ou ao seu interior, trace o segmento AX. A figura formada pela união dos segmentos AX é chamada de *pirâmide* (veja na figura 135 um caso particular em que P é um hexágono).

Ao ouvirmos a palavra pirâmide, logo nos vem à mente a imagem das três enormes construções localizadas no planalto de Gizé, as quais formam, provavelmente, o mais decantado grupo de monumentos em todo o mundo. Entretanto, os arqueólogos já encontraram mais de 80 pirâmides espalhadas por todo o Egito. Qual era sua finalidade e, principalmente, como foram construídas, são duas das mais intrigantes perguntas de toda a história da humanidade e que, talvez, nunca venham a ser respondidas ou, por outro lado, talvez venham a ter centenas de respostas conflitantes, conforme o ponto de vista de cada um de nós.

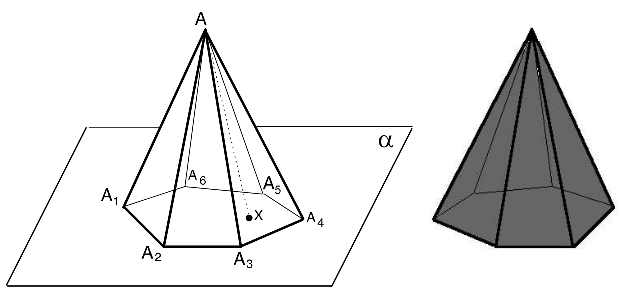

Fig. 135: Pirâmide hexagonal.

O ponto A é o *vértice da pirâmide* e o polígono P, unido com o seu interior, é a *base da pirâmide*. Os segmentos AA_1, AA_2, ..., AA_n são chamados *arestas laterais* e os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, ..., AA_nA_1, unidos com seus interiores, são as *faces laterais*. A distância do vértice A ao plano da base é chamada *altura da pirâmide*. Se a base tem três lados, a pirâmide é chamada *triangular*; se tem quatro lados, *quadrangular*, e assim por diante. A pirâmide triangular também recebe o nome de *tetraedro*.

Uma pirâmide é chamada *regular* se sua base é um polígono regular e se o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano da base coincide com o centro da base.

Falando de outra forma, uma pirâmide é regular se sua base é um polígono regular e se sua altura for a medida do segmento que une o vértice da pirâmide ao centro da base. Lembre-se de que o centro de um polígono regular é o centro da circunferência inscrita (ou circunscrita). Para alguns polígonos regulares, o centro é facilmente obtido.

Por exemplo, para triângulos, o centro é simplesmente o seu baricentro; para hexágonos, o centro é a interseção entre duas das maiores diagonais, como A_2A_5 e A_3A_6 na figura 136 (a).

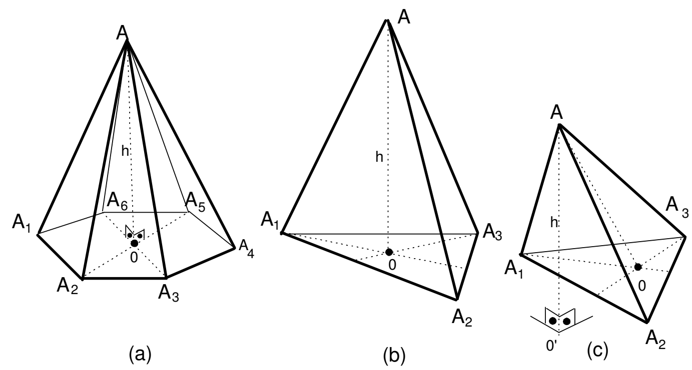

Fig. 136: Pirâmides regulares e não regulares.

As pirâmides (a) e (b) da figura 136 são regulares, pois suas bases são polígonos regulares e a altura de cada uma delas é a medida do segmento AO. A pirâmide (c) não é regular, pois sua altura é diferente da medida de AO. Um tipo especial de pirâmide regular é o *tetraedro regular* que é uma pirâmide regular, de base triangular, com todas as arestas congruentes.

Para pirâmides regulares, vale a proposição a seguir.

Proposição 38

As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes.

Prova:

Considere uma pirâmide regular com vértice A, e cuja base é um polígono (regular) $P = A_1A_2 \dots A_n$. Queremos mostrar que os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, ..., AA_nA_1 são isósceles e congruentes entre si. Para isso, seja O o centro de P e chame de d o valor da distância de O a cada um dos vértices de P. Trace o segmento OA_1 (acompanhe na figura 137, que ilustra o caso onde P é um hexágono).

Como a pirâmide é regular, sua altura h é a medida de AO, e o triângulo AA_1O é retângulo de hipotenusa AA_1. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$m(AA_1)^2 = m(AO)^2 + m(OA_1)^2 = h^2 + d^2,$$

de onde se conclui que $m(AA_1) = \sqrt{h^2 + d^2}$. Da mesma forma, prova-se que os segmentos AA_2, AA_3, …, AA_n também medem $\sqrt{h^2 + d^2}$. Daí se conclui imediatamente que todas as faces laterais são triângulos isósceles. As bases desses triângulos são os lados do polígono P. Como P é regular, conclui-se que os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, …, AA_nA_1 têm as mesmas medidas. Por L.L.L., segue que são todos congruentes entre si.

Q.E.D.

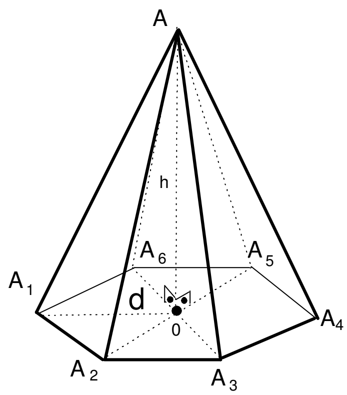

Fig. 137: Pirâmide regular.

Segue dessa proposição que os segmentos ligando os vértices de uma pirâmide regular aos pontos médios dos lados da base são todos congruentes. Esses segmentos são chamados de apótemas da pirâmide, e são precisamente as alturas relativas às bases de suas faces laterais (veja a figura 138). Também chamamos de apótema a medida desses segmentos.

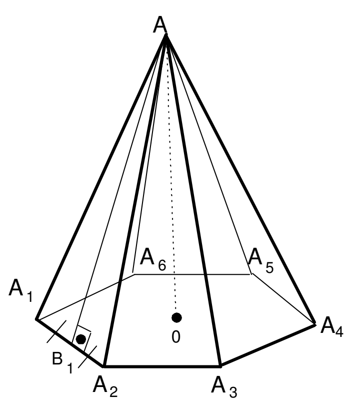

Fig. 138: AB_1 é apótema da pirâmide.

Definição 14
A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas de suas faces laterais. A área total é a soma da área lateral com a área da base.

Vamos determinar a área lateral de uma pirâmide regular. Considere uma pirâmide regular cujo vértice é A e cuja base é um polígono $P = A_1A_2\ldots A_n$. Sabemos que a altura relativa à base de cada face lateral é o apótema a da pirâmide. Logo

$$\begin{aligned}
\text{Área lateral} &= \text{Área}(AA_1A_2) + \text{Área}(AA_2A_3) + \ldots + \text{Área}(AA_nA_1) \\
&= \frac{1}{2}m(A_1A_2)a + \frac{1}{2}m(A_2A_3)a + \ldots + \frac{1}{2}m(A_nA_1)a \\
&= \frac{1}{2}\left[m(A_1A_2) + m(A_2A_3) + \ldots + m(A_nA_1)\right]a \\
&= \frac{1}{2}a(\text{perímetro de } P).
\end{aligned}$$

Provamos então a seguinte proposição:

Proposição 39
A área lateral de uma pirâmide regular é a metade do produto do apótema pelo perímetro da base.

Considere agora uma pirâmide qualquer e suponha que a cortemos por um plano α' paralelo ao plano α da base. O plano α' divide a pirâmide em dois pedaços. A parte que não contém a base é de novo uma pirâmide, e já sabemos algumas coisas sobre ela. A parte que contém a base (veja a figura 139) recebe o nome de pirâmide truncada ou tronco de pirâmide.

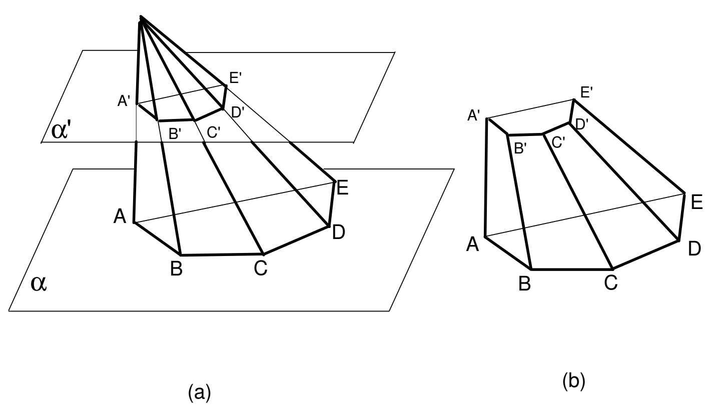

Fig. 139: Pirâmide e pirâmide truncada.

Em uma pirâmide truncada, as faces contidas nos planos paralelos são chamadas bases. As demais faces são as faces laterais. Para a pirâmide truncada $A'B'C'D'E'ABCDE$, mostrada na figura 139(b), as bases são os polígonos $A'B'C'D'E'$ e $ABCDE$. As faces laterais de uma pirâmide truncada são trapézios (justifique!).

Uma pirâmide truncada obtida a partir de uma pirâmide regular é chamada pirâmide truncada regular. As faces laterais de tal pirâmide são trapézios isósceles congruentes (veja exercício 17 desta aula). As alturas desses trapézios são chamadas apótemas da pirâmide truncada.

A área lateral de uma pirâmide truncada regular é dada pela proposição a seguir.

Proposição 40
A área lateral de uma pirâmide truncada regular é o produto do apótema pela média aritmética dos perímetros das bases.

Para a pirâmide truncada regular, mostrada na figura 140, a proposição 40 diz que a sua área lateral é $\frac{a(p+p')}{2}$, onde a é o apótema e p e p' são os perímetros dos polígonos $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$, respectivamente. A prova da proposição será deixada como exercício (veja exercício 18 desta aula).

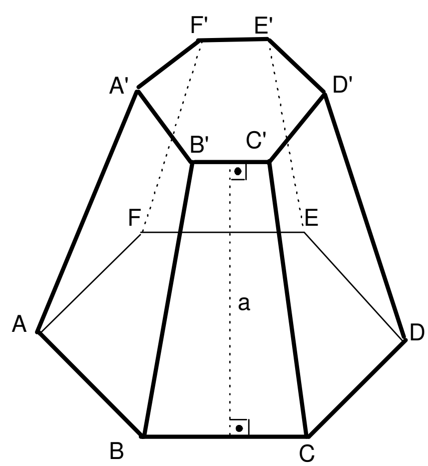

Fig. 140: a é apótema da pirâmide truncada regular.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A definição de pirâmide e de seus principais elementos.
- A calcular a área lateral de uma pirâmide regular.
- A calcular a área lateral de um tronco de pirâmide.

Exercícios

1. Determine a natureza de uma pirâmide, isto é, se a pirâmide é triangular, quadrangular etc., sabendo que a soma dos ângulos das faces é 2160^o.

2. Determine a altura de uma pirâmide regular, de base pentagonal, sabendo que todas as suas arestas medem $10\,cm$.

3. É possível construir uma pirâmide regular, de base hexagonal, de modo que todas as arestas tenham o mesmo comprimento?

4. A figura 141 mostra uma pirâmide regular de altura igual a $2\,m$ e base pentagonal de lado medindo $1\,m$. Determine a área do triângulo AFC.

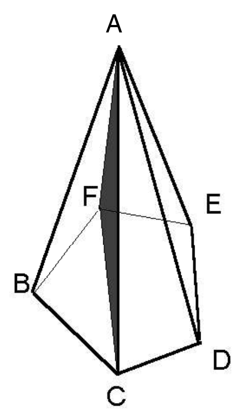

Fig. 141: Exercício 4.

5. Determine a área total de um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta.

6. Determine a altura de um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta.

7. Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que, aumentada em $4\,m$, sua área aumenta em $40\sqrt{3}\,m^2$.

8. Em uma pirâmide regular de base triangular, a medida de seu apótema é igual à medida do lado da base. Se sua área total vale $10\,m^2$, determine sua altura.

9. Determine a relação entre a medida de uma aresta lateral e a medida de uma aresta da base de uma pirâmide regular de base triangular, para que a área lateral seja $\dfrac{4}{5}$ da área total.

10. Uma pirâmide regular de base triangular de lado medindo $10\,cm$ tem suas faces laterais formando um ângulo de 60^o com o plano da base. Determine a altura da pirâmide.

11. Determine o ângulo que as faces laterais de uma pirâmide regular de base hexagonal formam com o plano da base, sabendo que as arestas laterais medem $2\sqrt{5}\,cm$ e que as arestas da base medem $4\,cm$.

12. Na figura 142, $ABCD$ é um tetraedro regular e M é o ponto médio de AD.

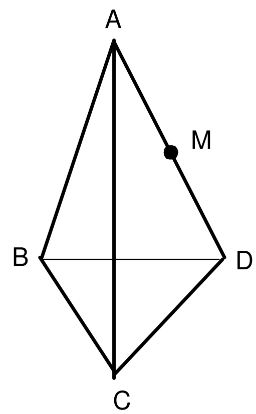

Fig. 142: Exercício 12.

   (a) Prove que o plano que contém $\overleftrightarrow{BC}$ e M é perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$.

   (b) Se a aresta de $ABCD$ mede a, determine a distância entre as aresta $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

13. (CESGRANRIO-1987) Seja $VABC$ um tetraedro regular. O cosseno do ângulo α que a aresta VA faz com o plano ABC é:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

14. (ESCOLA NAVAL-1988) Em uma pirâmide triangular $VABC$, a base ABC é um triângulo equilátero e as arestas VA, VB e VC formam ângulos retos. A tangente do ângulo formado por uma face lateral e a base é igual a:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

15. (CESGRANRIO-1988) Em uma pirâmide $VABCDEF$ regular hexagonal, uma aresta lateral mede o dobro de uma aresta da base (veja a figura 143).

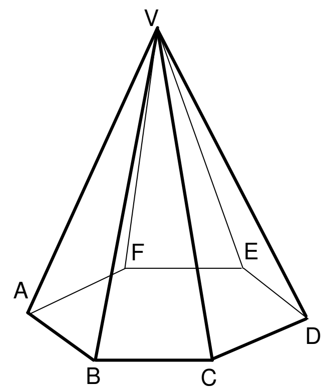

Fig. 143: Exercício 15.

O ângulo $A\widehat{V}D$ formado por duas arestas laterais opostas mede:

a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 75^o e) 90^o

16. (UFF-1997) Marque a opção que indica quantos pares de retas reversas são formados pelas retas suportes das arestas de um tetraedro:

a) um par b) dois pares c) três pares d) quatro pares e) cinco pares

17. (CESGRANRIO-1980) Considere a pirâmide hexagonal regular de altura h e lado da base medindo ℓ da figura 144. Trace o segmento GD ligando D ao ponto G que divide VC ao meio.

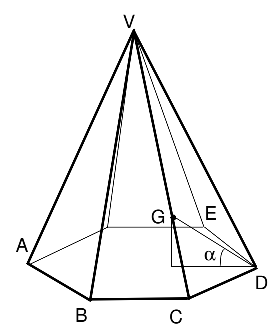

Fig. 144: Exercício 17.

Se α é o ângulo agudo formado por GD e sua projeção na base da pirâmide, então $tg\alpha$ é igual a:

a) $\dfrac{h\sqrt{3}}{3\ell}$ b) $\dfrac{h}{2\ell}$ c) $\dfrac{h\sqrt{2}}{\ell}$ d) $\dfrac{h\sqrt{3}}{2\ell}$ e) $\dfrac{h\sqrt{3}}{\ell}$

18. (UFF-2000) No tetraedro regular representado na figura 145, R e S são, respectivamente, os pontos médios de NP e OM.

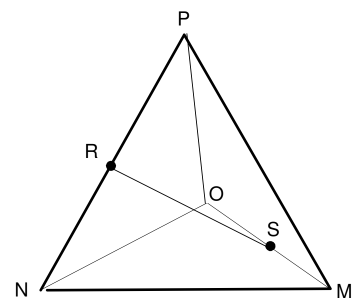

Fig. 145: Exercício 18.

A razão $\dfrac{m(RS)}{m(MN)}$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$

19. Prove que as faces laterais de uma pirâmide truncada regular são trapézios isósceles congruentes.

20. Prove a proposição 40.