

Aula 21 – Ângulos no espaço - parte II

Objetivos

- Identificar ângulos entre planos e entre retas e planos.
- Determinar distâncias no espaço.

Introdução

Nesta aula, dando continuidade ao nosso estudo de ângulos, veremos como se definem o ângulo entre dois planos e o ângulo entre uma reta e um plano no espaço. Veremos também como calcular a distância entre um ponto e uma reta, e entre um ponto e um plano.

Ângulo entre planos e perpendicularismo entre planos

Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome um ponto $A \in r$ e chame de γ o plano que passa por A e é perpendicular a r . Esse plano intersecta α e β segundo as retas s e t , respectivamente, como na figura 107.

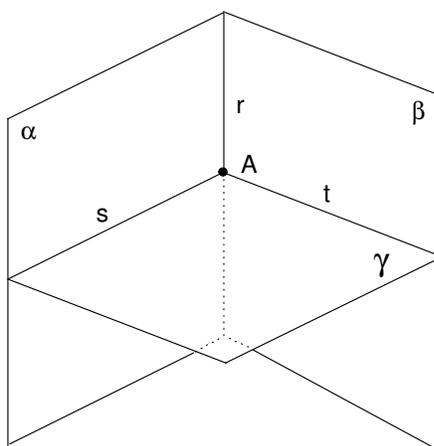


Fig. 107: Definição de ângulo entre planos.

O ângulo entre os planos α e β é definido como o ângulo entre as retas s e t . Prova-se (veja exercício 16) que o valor do ângulo não depende do ponto A escolhido, como está ilustrado na figura 108.

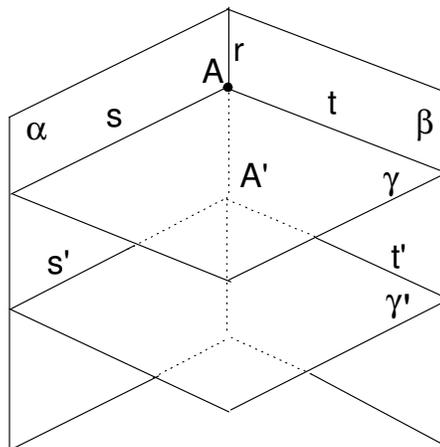


Fig. 108: O ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t' .

Dois planos são ditos perpendiculares se o ângulo entre eles for de 90° . A seguinte proposição fornece um ótimo critério para concluir que dois planos são perpendiculares.

Proposição 31

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então esses planos são perpendiculares.

Prova:

Seja r uma reta perpendicular a um plano α e suponha que o plano β contenha r . Queremos mostrar que α é perpendicular a β . Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$, e considere um ponto $A \in s$ que não pertença a r . Seja γ o plano que passa por A e é perpendicular a s . Esse plano corta α e β segundo retas u e t , respectivamente (figura 109). Por definição de perpendicularismo entre planos, para provar que $\beta \perp \alpha$, temos que mostrar que $u \perp t$.

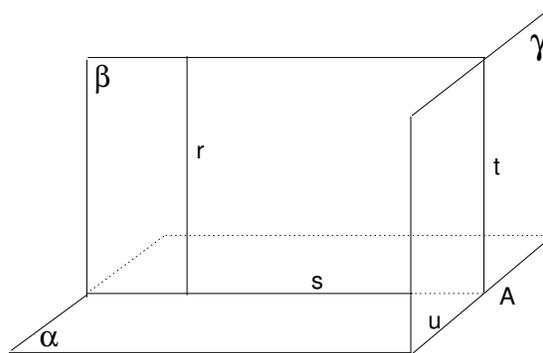


Fig. 109: Prova de que $\alpha \perp \beta$.

Em primeiro lugar, $r \perp s$, pois r é perpendicular a α e $s \subset \alpha$. Como s é perpendicular a γ por construção do plano γ , segue do exercício 2 da aula 20 que r é paralela a γ . Isso implica que r e t não se intersectam. Como r e t são coplanares (ambas pertencem a β), conclui-se que r e t são paralelas. Como $r \perp \alpha$, segue que t é perpendicular a α . Assim, t é perpendicular a qualquer reta contida em α . Mas u está em α , pois $u = \gamma \cap \alpha$. Logo, t é perpendicular a u . Q.E.D.

A proposição seguinte também relaciona perpendicularismo entre reta e plano com perpendicularismo entre planos.

Proposição 32

Se uma reta r e um plano β são perpendiculares a um plano α , então r está contida em β ou r é paralela a β .

Prova:

Suponha que r não esteja contida em β . Provaremos que r é paralela a β . Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$ e considere um plano γ perpendicular a s . O plano γ corta α e β segundo retas que chamaremos u e t , como na figura 110.

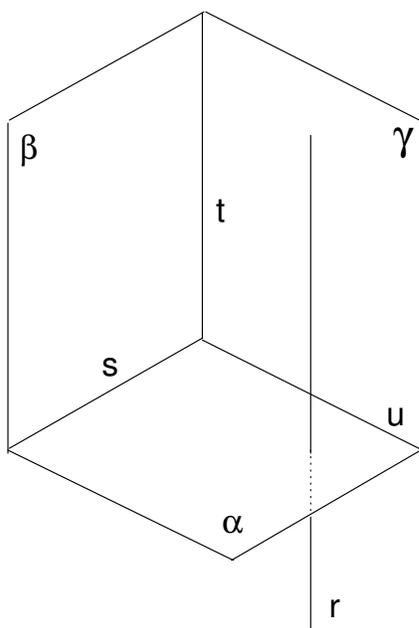


Fig. 110: Prova da proposição 24.

Como $\gamma \perp s$ por construção, tem-se $s \perp t$ e $s \perp u$. Além disso, por definição de perpendicularismo entre planos, tem-se que $t \perp u$. Logo, t é perpendicular às retas concorrentes s e u contidas em α . Concluímos então que $t \perp \alpha$. Mas r é perpendicular a α por hipótese, e $r \neq t$, porque t está contida em β e r não está. Segue então, da proposição 27, que r é paralela a t . Como $t \subset \beta$, conclui-se que r é paralela a β . Q.E.D.

A seguinte proposição decorre diretamente das anteriores e será deixada como exercício ao fim desta aula.

Proposição 33

Se dois planos secantes são perpendiculares a um plano, então a reta de interseção entre eles é perpendicular a esse plano.

Ângulo entre uma reta e um plano

Considere uma reta r oblíqua a um plano α , intersectando-o no ponto A . Observe que as retas que estão em α e passam por A fazem com r ângulos que podem ser bem diferentes. Veja a figura 111. Por esse motivo, a definição de ângulo entre reta e plano merece um certo cuidado.

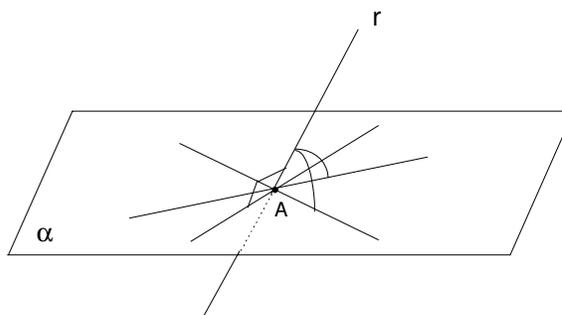


Fig. 111: O ângulo entre r e as retas de α varia.

Se r for perpendicular a α , existem infinitos planos perpendiculares a α contendo r (como você verá no exercício 3 desta aula). A situação é diferente no caso em que r é oblíqua a α : existe um único plano contendo r e perpendicular a α . Vamos mostrar essa afirmação.

Para isso, seja $A = r \cap \alpha$ e tome um ponto $P \neq A$ em r . Chame de Q o pé da perpendicular baixada de P ao plano α . Temos que $Q \neq A$, pois estamos assumindo que r é oblíqua a α . Seja β o plano que passa pelos pontos P , Q e A (veja a figura 112).

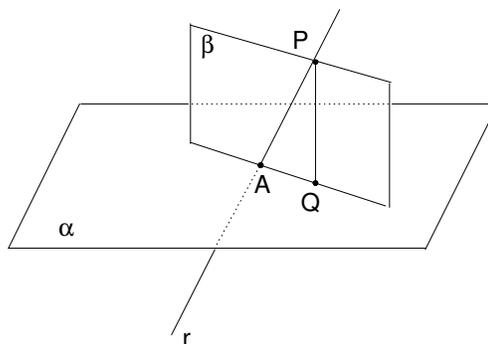


Fig. 112: Plano contendo r e perpendicular a α .

Como β contém a reta \overleftrightarrow{PQ} , que é perpendicular a α , segue que $\beta \perp \alpha$. Além disso, β contém r (pois contém os pontos P e A , pertencentes a r). Está provado então que existe um plano perpendicular a α que contém r .

Para provar a unicidade, considere um plano γ contendo r e perpendicular a α . Como \overleftrightarrow{PQ} é perpendicular a α , obtém-se da proposição 32 que $\overleftrightarrow{PQ} \subset \gamma$ ou $\overleftrightarrow{PQ} // \gamma$. Não podemos ter o segundo caso, pois $P \in r \subset \gamma$. A conclusão é que \overleftrightarrow{PQ} está contida em γ , de onde se conclui que γ contém os pontos P , Q e A . Mas esses pontos determinam o plano β , o que mostra que $\gamma = \beta$. Concluimos então que só existe um plano perpendicular a α contendo r . Provamos então a proposição a seguir:

Proposição 34

Se uma reta é **oblíqua** a um dado plano, existe um único plano contendo a reta e perpendicular a esse plano.

Podemos agora definir o ângulo entre uma reta e um plano.

Definição 5

Se uma reta é perpendicular a um plano, dizemos que eles formam um ângulo de 90° . Se r é uma reta oblíqua a um plano α , e β é o plano contendo r e perpendicular a α , definimos o ângulo entre r e α como sendo o ângulo entre r e $s = \alpha \cap \beta$ (figura 113).

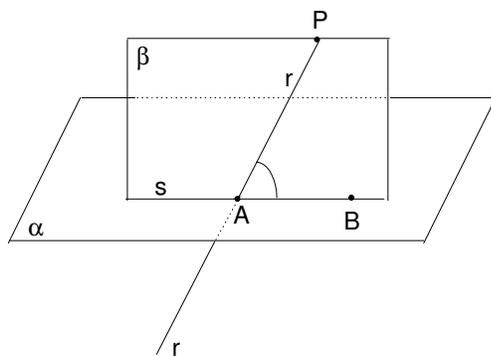


Fig. 113: O ângulo entre r e α é o ângulo entre r e s .

Distâncias no espaço

Como você deve se lembrar, a distância entre dois pontos no plano é o comprimento do segmento de reta que une os dois pontos. Essa mesma forma de calcular a distância entre dois pontos também é usada para pontos no espaço. **Vamos agora definir a distância entre ponto e reta e entre ponto e plano.**

Definição 6

Considere um ponto P e uma reta r . Se $P \in r$, a distância de P a r é zero. Se $P \notin r$, seja α o plano que contém r e P , e seja s a única reta de α que passa por P e é perpendicular a r . Seja $Q = r \cap s$. A distância de P a r é definida como a medida do segmento PQ (figura 114).

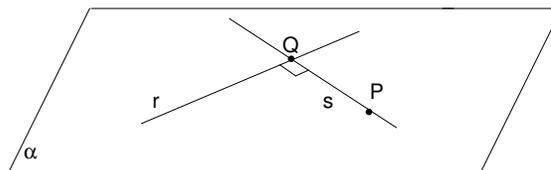


Fig. 114: Distância de ponto a reta.

Observe que Q é o ponto de r mais próximo de P . Em outras palavras, tem-se $m(PR) > m(PQ)$ para qualquer outro ponto R na reta r .

Definição 7

Considere um ponto P e um plano α . Se $P \in \alpha$, a distância de P a α é zero. Se $P \notin \alpha$, seja Q o pé da perpendicular baixada de P a α . A distância de P a α é definida como a medida do segmento PQ (veja a figura 115).

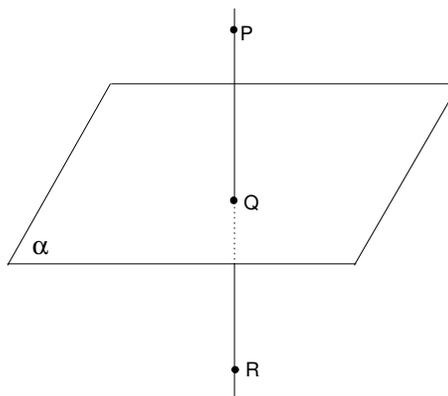


Fig. 115: Distância de ponto a reta.

Como vimos no exercício 9 da aula 20, o ponto Q é o ponto de α mais próximo de P .

Definiremos, a seguir, a distância de reta a plano e a distância de plano a plano, que são bastante intuitivas. Ao final desta aula definiremos a distância entre duas retas no espaço, o que é um conceito um pouco mais elaborado.

Definição 8

Considere uma reta r e um plano α . Se r intersecta α , a distância entre r e α é zero. Se r não corta α , ou seja, $r // \alpha$, segue pelo exercício 11 da aula 20 que, para quaisquer pontos A e B em r , a distância de A a α é igual à distância de B a α . Definimos a distância de r a α como sendo a distância de qualquer ponto de r a α . Veja a figura 116.

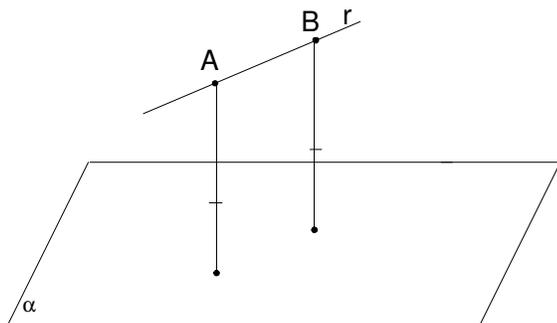


Fig. 116: Distância de reta a plano.

Definição 9

Considere dois planos α e β . Se α intersectar β , a distância de α a β é zero. Se α é paralelo a β , segue do exercício 10 da aula 20 que, dados dois pontos A e B quaisquer do plano α , a distância de A a β é igual à distância de B a β , ou seja, esse valor não depende do ponto escolhido. A distância de α a β é definida como a distância de um ponto qualquer de α a β (ou vice-versa).

Vamos agora definir a distância entre duas retas. O caso mais simples é quando as duas retas em questão estão em um mesmo plano: são concorrentes ou paralelas. Veremos então esses dois casos primeiro.

Definição 10

Se duas retas são concorrentes, a distância de uma a outra é zero. Se duas retas r e s são paralelas, mostra-se (veja exercício 12) que dados quaisquer dois pontos A e B de r , a distância entre A e s é igual à distância entre B e s , ou seja, esse valor não depende do ponto (veja a figura 117). Nesse caso, a distância de r a s é definida como a distância de um ponto qualquer de r a s .

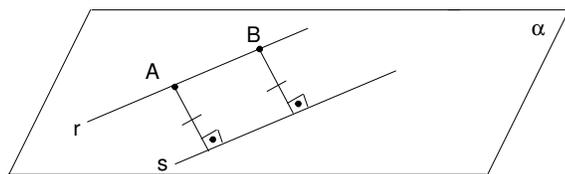


Fig. 117: Distância entre retas paralelas.

Suponha agora que r e s sejam retas reversas. Sabemos, da proposição 19, da aula 19, que existem planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Tome um ponto $A \in r$, e seja B o pé da perpendicular baixada de A ao plano β . Seja r' a reta paralela a r passando por B . A reta r' corta s (por quê?) em um ponto que chamaremos C . Veja a figura 118. Trace a reta paralela a \overleftrightarrow{AB} passando por C . Essa reta corta r (por quê?) em um ponto que chamaremos D , também indicado na figura 118. Temos que a reta \overleftrightarrow{CD} é perpendicular aos planos paralelos α e β , pois \overleftrightarrow{CD} é paralela a \overleftrightarrow{AB} .

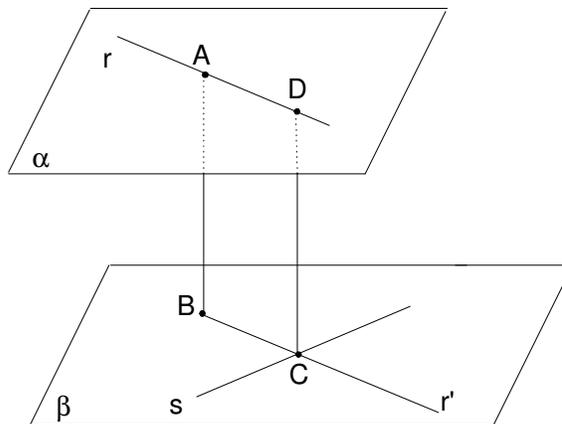


Fig. 118: A distância de r a s é $m(CD)$.

Podemos provar (veja exercício 13 desta aula) que o segmento CD é o único, dentre aqueles que ligam um ponto de r a um ponto de s , que é perpendicular a r e a s ao mesmo tempo. Além disso, ele é o de menor comprimento, ou seja, $m(CD) < m(C'D')$, para quaisquer pontos $C' \in s$ e $D' \in r$ (veja o exercício 14). Isso motiva a seguinte definição:

Definição 11

Se r e s são retas reversas, a distância de r a s é a medida do único segmento com extremos em r e s que é perpendicular a r e a s .

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Como calcular ângulos entre planos.
- Como calcular ângulos entre retas e planos.
- Como calcular distâncias entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre reta e plano, entre planos e entre retas.

Exercícios

- Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.
 - Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
 - Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são perpendiculares entre si.
 - Se uma reta e um plano são paralelos, então todo plano perpendicular ao plano dado é perpendicular à reta.
 - Se uma reta é oblíqua a um de dois planos paralelos, então ela é oblíqua ao outro.
 - Não existem quatro retas perpendiculares duas a duas.
- Se um plano γ é perpendicular a dois planos secantes α e β , mostre que γ é perpendicular à reta de interseção entre α e β .
- Dados um plano α e uma reta r perpendicular a α , mostre que existem infinitos planos contendo r .
- Se uma reta r está contida em um plano α e s é perpendicular a α , mostre que existe um único plano contendo s e perpendicular a r .
- Se dois planos são paralelos, prove que todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
- Se uma reta r é paralela a um plano α , prove que todo plano perpendicular a r é perpendicular a α .
- Se uma reta r é paralela a um plano α , prove que existe um único plano contendo r e perpendicular a α .
- Prove que o ângulo entre uma reta e um plano é igual ao ângulo entre essa reta e qualquer plano paralelo ao plano dado.
- Se A e B são pontos distintos, prove que o conjunto de pontos do espaço que são equidistantes de A e B é um plano. Além disso, esse plano passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a \overleftrightarrow{AB} .
- Seja ABC um triângulo que não intersecta um plano α , e sejam a , b e c as distâncias de, respectivamente, A , B e C ao plano α . Prove que a distância do baricentro de ABC ao plano α é dada por $\frac{a + b + c}{3}$.

11. Seja r uma reta que corta um plano α , e seja s uma reta contida em α . Prove que o ângulo entre r e s é maior ou igual ao ângulo entre r e α .
12. Prove que retas paralelas são equidistantes. Mais precisamente, se r e s são retas paralelas, prove que a distância de A a s é igual à distância de B a s , quaisquer que sejam A e B pertencentes a r .
13. Se r e s são retas reversas, prove que existe somente um segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s .
14. Sejam r e s retas reversas e seja CD ($C \in r$ e $D \in s$) o único segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s . Prove que $m(CD) < m(C'D')$, quaisquer que sejam $C' \in s$ e $D' \in r$.
15. Prove a proposição 33 desta aula.
16. Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome pontos A e A' em r e sejam γ e γ' os planos perpendiculares a r e que passam por A e A' , respectivamente. Sejam $s = \gamma \cap \alpha$, $t = \gamma \cap \beta$, $s' = \gamma' \cap \alpha$ e $t' = \gamma' \cap \beta$ (veja a figura 118). Prove que o ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t' .

Sugestão: Prove que $s // s'$ e $t // t'$. Inspire-se no exercício 12 da aula 20.

17. (UFF,1996) Considere dois planos α e β , secantes e não-perpendiculares, e um ponto P não pertencente a α nem a β . Pode-se afirmar que:
 - (a) Toda reta que passa por P e é paralela a α também é paralela a β .
 - (b) Toda reta que passa por P e intersecta α também intersecta β .
 - (c) Se um plano contém P e intersecta α então ele intersecta β .
 - (d) Existe um plano que contém P e é perpendicular a α e a β .
 - (e) Existe um plano que contém P e é paralelo a α e a β .